پخش۳

سری های نامتناهی

۲-۳-۱: تعریف : هرگاه $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله حقیقی باشد، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

را یک سری نامتناهی گویند.

۲-۳-۲: مثال

$$1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad 2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{n!} \qquad 3)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

$$4)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!-1} \qquad 5)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n^2}{n^2+1} \qquad 6)\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \,(r \neq 0)$$

۲-۳-۳: جمع جزئی- هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری نامتناهی باشد، آنگاه

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

را جمع جزئی n جمله اول سری گویند. در واقع

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1 \\ &S_2 = a_1 + a_2 \\ &S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

بوده و $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ را دنباله جمع جزئی سری می نامند.

۲-۳-۴: مثال

۱-دنباله جمع جزئی سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ را بدست آورید.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^{۲} + \ldots + ar^{n-۱} + ar^n$$

$$\to (۱-r)S_n = a - ar^n = a(۱-r^n)$$

$$\to \forall r \neq ۱ \ (S_n = \frac{a(۱-r^n)}{۱-r}$$

دنباله جمع جزئی سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty} ar^n$ با جمله اول a و قدر نسبت r می باشد.

۲–دنباله جمع جزئی سری نامتناهی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{(n+۱)!}$ را مشخص کنید.

با توجه به رابطه زیر

$$\forall k, \frac{k}{(k+۱)!} = \frac{k+۱-۱}{(k+۱)!} = \frac{k+۱}{(k+۱)!} - \frac{۱}{(k+۱)!} = \frac{۱}{k!} - \frac{۱}{(k+۱)!}$$

داریم،

$$S_n = \frac{۱}{۲!} + \frac{۲}{۳!} + \frac{۳}{۴!} + \ldots + \frac{n}{(n+۱)!}$$

$$= (\frac{۱}{۱!} - \frac{۱}{۲!}) + (\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!}) + \ldots + (\frac{۱}{n!} - \frac{۱}{(n+۱)!}) = ۱ - \frac{۱}{(n+۱)!}$$

پس $\left(S_n = ۱ - \frac{۱}{(n+۱)!} \right)$ دنباله جمع جزئی سری است.

۳–دنباله جمع جزئی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)}$ را بدست آورید.

باتوجه به تساوی زیر

$$\forall k, \frac{۱}{k(k+۱)} = \frac{۱}{k} - \frac{۱}{k+۱}$$

داریم

$$S_n = \frac{۱}{۱\times۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + \ldots + \frac{۱}{n(n+۱)}$$

$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$

پس $\left(S_n=1-\frac{1}{n+1}\right)$ دنباله جمع جزئی سری می باشد.

۲-۳-۵:تعریف- همگرائی یا واگرائی سری نامتناهی

گوییم سری نامتناهی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ همگرا است اگر و فقط اگر دنباله جمع جزئی آن، (S_n)همگرا، یعنی $\lim S_n=S$ وجود داشته باشد و در واقع داریم، $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim S_n=S$.در غیر اینصورت سری واگرا خواهد بود.

۲-۳-۶: مثال:

همگرائی و واگرائی سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$ را مشخص کنید.

میدانیم $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $\forall r\neq 1,$ ضابطه دنباله جمع جزئی سری است. از طرفی در بخش دنباله ها در مثال ۲-۱-۲(۴) ثابت کردیم: $\forall r, 0<|r|<1, \lim r^n=0$

پس $$\forall r, 0<|r|<1, \lim S_n=\lim\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

وجود دارد، یعنی $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$ برای r هائی که $0<|r|<1$ همگراست.

بدیهی است در سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$ اگر $r=1$باشد آنگاه

$$S_n=a+a+...+a=na$$

و دنباله $(S_n=na)$واگراست و اگر $r=-1$ آنگاه دنباله: $\left(S_n=\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{2}a\right)$

واگراست. همچنین اگر $|r|>1$، آنگاه $\lim r^n$ وجود ندارد یا نامتناهی است پس دنباله $\{S_n\}$ واگرا خواهد بود.

نتیجه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, 0<|r|<1 & \text{(همگرا است)} \\ |r|\geq 1 & \text{(واگرا است)} \end{cases}$$

در زیر به بررسی مثال های جالبی در مورد سری هندسی می پردازیم.

۲-۳-۷: مثال:

۱-تعیین کنید به ازای چه مقادیری از x، سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ همگرا یا واگرا است.

میدانیم

$$\forall x \neq 1, S_n = 1+x+x^2+....+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

دنباله جمع جزئی سری است. و

$$\forall x, |x|<1, \lim S_n = \lim \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

وجود دارد . پس $\forall x,\ |x|<1,\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim S_n = \frac{1}{1-x}$ همگرا است و این نتیجه می دهد:

۱-

$$\boxed{\forall x, |x|<1, 1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+.... = \frac{1}{1-x}}$$

همگرا است.

اگر در سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$، $x=1$ یا $x=-1$ باشد، آنگاه دنباله (S_n) به ترتیب ضابطه $S_n = n$ و $\left(S_n = \frac{1-(-1)^n}{2}\right)$ را دارد که واگراست.

۲- با توجه به نتیجه بالا داریم:

$$\forall x, |x|<1 \rightarrow |-x| = |x| < 1$$

پس

$$\forall x,|x|<۱,۱+\sum_{n=۰}^{\infty}(-x)^{n}=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}x^{n}=۱-x+x^{۲}-x^{۳}+....=\frac{۱}{۱+x}$$

نتیجه ۲ :

$$\boxed{\forall x,\ \ |x|<۱\ ,\ \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}x^{n}=۱-x+x^{۲}-x^{۳}+....=\frac{۱}{۱+x}}$$

همگراست.

۳- با توجه به نتیجه ۱و ۲ داریم:

$$\forall x,|x|<۱\rightarrow\left|x^{۲}\right|=|x|^{۲}\leq|x|<۱$$

پس

۳-

$$\boxed{\forall x,|x|<۱,۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(x^{۲}\right)^{n}=۱+\sum_{n=۰}^{\infty}x^{۲n}=۱+x^{۲}+x^{۴}+....=\frac{۱}{۱-x^{۲}}}$$

همگراست.

و همچنین،

۴-

$$\boxed{\forall x,|x|<۱,۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}x^{۲n}=۱-x^{۲}+x^{۴}-x^{۶}+...=\frac{۱}{۱+x^{۲}}}$$

همگراست.

۴- با توجه به ۱ و ۲ می توان سری های تابعی ساخت که همگرا هستند.

$$\forall x\ ,\ ۰<x<۱\quad\rightarrow\quad ۰<\sqrt{x}<۱$$

پس

$$\forall x,۰<x<۱,۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\sqrt{x}\right)^{n}=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}x^{\frac{n}{۲}}=۱+x^{\frac{۱}{۲}}+x+x^{\frac{۳}{۲}}+...=\frac{۱}{۱-\sqrt{x}}$$

همگرا است.

همچنین با توجه به اینکه

$$\forall x, |x| < ۱ \to \left|\sqrt[۳]{x}\right| < ۱$$

پس

$$\forall x, |x| < ۱, ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\sqrt[۳]{x}\right)^n = ۱ + x^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۲}{۳}} + x + x^{\frac{۴}{۳}} + \ldots = \frac{۱}{۱ - \sqrt[۳]{x}}$$

همگرا است.

با توجه به اینکه $\forall x,\ \circ < |x| < \frac{\pi}{۲}, \circ < \cos x < ۱$

بنابراین

$$\forall x,\ \circ < |x| < \frac{\pi}{۲}, ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} (\cos x)^n = ۱ + \cos x + \cos^۲ x + \ldots = \frac{۱}{۱ - \cos x}$$

و

$$\forall x, \circ < |x| < \frac{\pi}{۲}, ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \cos^n x = ۱ - \cos x + \cos^۲ x - \cos^۳ x + \ldots = \frac{۱}{۱ + \cos x}$$

با توجه به اینکه $\forall\, x, -\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{۲} < \tan^{-۱} x < \frac{\pi}{۲} \to -۱ < \frac{۲\tan^{-۱} x}{\pi} < ۱$

بنابراین

$$۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۲\tan^{-۱} x}{\pi}\right)^n = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{\pi^n} (\tan^{-۱} x)^n$$

$$= ۱ + \frac{۲}{\pi} \tan^{-۱} x + \frac{۴}{\pi^۲} \left(\tan^{-۱} x\right)^۲ + \ldots = \frac{۱}{۱ - \frac{۲}{\pi} \tan^{-۱} x}$$

همگراست.

قضایای همگرائی و واگرائی سری ها :

۲-۳-۸ : (قضیه شرط لازم همگرائی)

هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim a_n = 0$.

$$\left(\text{همگرائی} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \to \lim a_n = 0\right)$$

اثبات: با توجه به تعریف همگرائی سری ها(۲-۳-۵) میدانیم:

(دنباله جمع جزئی سری (S_n) همگرا باشد) $\lim S_n = S \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست.

با توجه به اینکه

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}$$

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

داریم $S_{n+1} - S_n = a_n$، حال چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگراست پس $\lim S_{n+1} = \lim S_n = S$ و این نتیجه میدهد $\lim a_n = \lim(S_{n+1} - S_n) = 0$.

۲-۳-۹:نتیجه مهم از قضیه (۲-۳-۸) :

$$\boxed{\lim a_n \neq 0 \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \text{واگراست}}$$

۲-۳-۱۰: مثال

همگرائی یا واگرائی $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{c}$ را با فرض $c \rangle 0$ بررسی کنید.

با توجه به مثال (۲-۲-۱۲) ۱بخش دنباله، میدانیم $\lim \sqrt[n]{c} = ۱ \neq ۰$ پس سری واگراست.

۲-همگرائی یا واگرائی $\sum_{n=۱}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ را بررسی کنید.

طبق مثال (۲-۲-۱۲)۲ ، داریم $\lim \sqrt[n]{n} = ۱ \neq ۰$ پس سری واگراست.

۳- همگرائی یا واگرائی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{n^۳ + n^۲} - \sqrt{n^۳}}{۳\sqrt{n} + ۱}$ را بررسی کنید.

با توجه به اینکه $\lim \frac{\sqrt{n^۳ + n^۲} - \sqrt{n^۳}}{۳\sqrt{n} + ۱} = \frac{۱}{۶} \neq ۰$ پس سری واگراست.

توجه کنید: عکس قضیه (۲-۳-۸)درست نمی باشد، یعنی

$$\lim a_n = ۰ \nrightarrow \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \quad \text{همگراست}$$

۲-۳-۱۱: مثال

بدیهی است در سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$، داریم $\lim a_n = ۰$ در صورتی طبق مثال (۲-۲-۱۸)(۶) ، میدانیم

$$P = ۱ \ \rightarrow \ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = \lim (S_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{n}) = \infty$$

واگراست.

۲-۳-۱۲: هرگاه سری های نامتناهی $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ همگرا باشند ، آنگاه سری نامتناهی

$\sum_{n=۰}^{\infty} ka_n + lb_n \quad \forall k, l \in \mathbb{R}$ نیز همگراست.

اثبات: گیریم (S_n) و (T_n) به ترتیب جمع جزئی سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ باشد، با توجه به فرض همگرائی دو سری داریم $\lim S_n = S$, $\lim T_n = T$ همگرا هستند. بنابراین طبق قضیه (۲-۲-۱۱) بخش دنباله ها، $R_n = kS_n + lT_n$ دنباله جمع جزئی سری $\sum ka_n + lb_n$ نیز همگراست و

$$\lim R_n = \lim kS_n + lT_n = kS + lT$$

یعنی سری همگراست.

۲-۳-۱۳: هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری غیر منفی (یعنی $\forall n, a_n \geq 0$) باشد آنگاه

$$\boxed{\text{دنباله جمع جزئی سری از بالا کراندار باشد } (S_n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ همگراست}}$$

$$\boxed{(S_n) \text{ از بالا بی کران باشد } \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ واگراست}}$$

اثبات: $(\leftarrow)$ با توجه به فرض $\forall n, a_n \geq 0$ داریم:

$$\forall n, S_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n \geq S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$$

یعنی دنباله (S_n) صعودی است. حال با توجه به فرض از بالا کراندار بودن (S_n) طبق قضیه همگرائی دنباله های یکنوا (۲-۲-۱۶) دنباله جمع جزئی سری (S_n) همگرا است، پس سری همگرا خواهد بود.

اثبات $(\rightarrow)$ تمرین.

۲-۳-۱۴: مثال:

۱- همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ را بررسی کنید.

بدیهی است $\forall n, x_n = \frac{1}{n!} > 0$ پس سری غیر منفی است. از طرفی طبق مثال (۲–۲–۱۸) بخش دنباله داریم

$$\forall n \geq 1 \qquad 0 \leq S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 2$$

یعنی (S_n) از بالا کراندار است، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ همگراست.

۲–همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$ را بررسی کنید.

بدیهی است $\forall n \geq 1, x_n = \frac{n}{(n+1)2^n} \geq 0$ علاوه بر این

$$\forall n \geq 1, S_n = \frac{1}{2\times 2} + \frac{2}{3\times 2^2} \times \frac{3}{4\times 2^3} + \ldots + \frac{n}{(n+1)2^n}$$

$$\leq \frac{2}{2\times 2} + \frac{3}{3\times 2^2} + \frac{4}{4\times 2^3} + \ldots + \frac{n+1}{(n+1)2^n}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{n+1}})}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \leq 1$$

بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$ همگراست.

۳– همگرائی سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را برای $p \geq 2$ بررسی کنید.

بدیهی است $\forall n \geq 1, x_n = \frac{1}{n^p} > 0$ از طرفی طبق مثال (۲–۲–۱۸)۵و۶ داریم

$$\forall p \ge ۲, \forall n \ge ۱, ۰ \le S_n = \frac{۱}{۱^p} + \frac{۱}{۲^p} + \ldots + \frac{۱}{n^p} \le \frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \ldots + \frac{۱}{n^۲} \le ۲$$

یعنی (S_n) از بالا کراندار است، بنابراین $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ همگرا است.

۴- واگرائی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ برای $۰ \le p < ۱$ بررسی کنید.

برای $P = ۱$، $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست زیرا دنباله جمع جزئی آن (S_n)،

$$S_n = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{n}$$

طبق مثال (۲-۲-۱۵)۳ واگراست. از طرفی طبق مثال (۲-۲-۱۸)۶ داریم،

$$\forall P,\ ۰ \langle P \le ۱,\ ۰ \le S_n = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{n} \le T_n = \frac{۱}{۱^p} + \frac{۱}{۲^p} + \ldots + \frac{۱}{n^p}$$

و $\lim S_n = +\infty$ پس (T_n) نیز واگراست. بنابراین سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ برای $۰ \le p < ۱$ واگراست.

۲-۳-۱۵: ا: آزمون مقایسه آزمون های همگرائی یا واگرائی مقایسه

گیریم (a_n) و (b_n) دو دنباله غیر منفی بوده به طوریکه

$$\exists N > ۰ \ni \forall n \ge N, ۰ \le a_n \le b_n$$

باشد در اینصورت

الف: اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب: اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ واگرا خواهد بود.

اثبات: گیریم

$$T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \quad \text{و} \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

دنباله های جمع جزئی دو سری باشند ، با توجه به فرض

$$\exists N > 0, \ni \forall n \ge N, 0 \le a_n \le b_n$$

داریم،

$$\forall n \ge N, 0 \le S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N + \dots + a_n$$

$$\le (a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}) + b_N + b_{N+1} + \dots + b_n$$

$$= S_{N-1} + (T_n - T_{N-1}) = (S_{N-1} - T_{N-1}) + T_n$$

پس

$$\exists N > 0 \ni \forall n, n \ge N \quad \to \quad 0 \le S_n \le M + T_n$$

بطوریکه $M = S_{N-1} - T_{N-1}$. حال با توجه به نتیجه اخیر ، اگر $\sum b_n$ همگرا باشد ، پس دنباله جمع جزئی آن (T_n) از بالا کراندار است .

و این نتیجه می دهد (S_n) از بالا کراندار است بنابر این $\sum a_n$ همگراست . اگر $\sum a_n$ واگرا باشد آنگاه (S_n) دنباله جمع جزئی آن از بالا بی کران خواهد بود ، بنابر این دنباله (T_n) نیز از بالا بی کران بوده واین نتیجه می دهد $\sum b_n$ واگراست .

۲-۳-۱۶: مثال:

۱- همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 5n^2 + 1}$ را بررسی کنید .

بدیهی است

$$\forall n \geq ۱, ۰ < a_n = \frac{n}{n^۳ + ۵n^۲ + ۱} \leq \frac{n}{n^۳} = \frac{۱}{n^۲} = b_n$$

و $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n = \frac{۱}{n^۲}$ طبق مثال (۲-۳-۱۴)۳ همگراست، پس $\sum a_n$ نیز همگرا خواهد بود.

۲-همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n+\sqrt{n}}$ را بررسی کنید.

بدیهی است $\forall n \geq ۱, ۰ \leq y_n = \frac{۱}{۲n} \leq x_n = \frac{۱}{n+\sqrt{n}}$

وسری $\frac{۱}{۲} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست پس سری $\sum x_n$ نیز واگرا خواهد بود.

۲-۳-۱۷:همگرائی مطلق

هرگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است. (در اینجا معمولا می گویند $\sum a_n$ همگرای مطلق است.)

اثبات: میدانیم طبق خواص قدر مطلق $\forall n \geq ۱, -|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ بنابراین

$$\forall n \geq ۱, ۰ \leq x_n = a_n + |a_n| \leq ۲|a_n|$$

حال طبق آزمون مقایسه اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ همگراست.

و اما $a_n = x_n - |a_n|$ بنابراین طبق قضیه (۲-۳-۱۳)، $\sum a_n$ همگرا خواهد بود.

۲-۳-۱۸: مثال

۱-همگرائی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^n ۲^n}$ را بررسی کنید

بدیهی است
$$\forall n, 0 \le \left| a_n = \frac{(-1)^n}{n^n 2^n} \right| = \frac{1}{n^n 2^n} \le (\frac{1}{2})^n = b_n$$

و سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ سری هندسی همگرا است زیرا $0 < r = \frac{1}{2} < 1$ پس، $\sum |a_n|$ همگرا بوده و این نتیجه میدهد $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

۲- همگرائی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n - \cos n}{n^2 + 1}$ را بررسی کنید.

بدیهی است

$$\forall n, 0 \le \left| a_n = \frac{\sin n - \cos n}{n^2 + 1} \right| \le \frac{|\sin n| + |\cos n|}{n^2 + 1} \le \frac{2}{n^2 + 1} \le \frac{2}{n^2} = b_n$$

واما $\sum \frac{1}{n^2}$ همگرا است پس سری $\sum |a_n|$ همگرا می باشد و این نتیجه میدهد سری همگرای مطلق است.

۳- همگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n - n^2)}{n^2 3^n}$ را بررسی کنید.

بدیهی است

$$\forall n \ge 1, 0 \le \left| a_n = \frac{(-1)^n (2n - n^2)}{n^2 3^n} \right| = \frac{|(-1)^n| \, |2n - n^2|}{n^2 3^n} = \frac{|2n - n^2|}{n^2 3^n}$$

$$\le \frac{|2n| + |n^2|}{n^2 3^n} \le \frac{2n^2 + n^2}{n^2 3^n} = \frac{3n^2}{n^2 3^n} = \frac{3}{3^n}$$

و اما سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$ همگراست زیرا $0 < r = \frac{1}{3} < 1$ ،پس همگرا بوده و این نتیجه میدهد سری همگرای مطلق است.

توجه کنید در همگرائی مطلق داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}|a_n| \rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} a_n$$ همگرا باشد همگراست

عکس این گزاره درست نمی باشد، یعنی

$$\text{همگرا } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \nrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ همگرا}$$

به عبارتی ممکن است $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا بوده ولی $\sum_{n=۱}^{\infty}|a_n|$ همگرا نباشد ، برای مثال می توان نشان داد سری متناوب $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ همگراست (در بخش های بعدی اثبات خواهیم کرد) در صورتی که می دانیم سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ واگراست . در حالتی که $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا بوده ولی $\sum_{n=۱}^{\infty}|a_n|$ واگرا باشد ، همگرائی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ را همگرائی مشروط می نامند .

۲-۳-۱۹: II: مقایسه حدی

گیریم (a_n) و (b_n) دو دنباله غیر منفی بوده به طوریکه $\lim \frac{a_n}{b_n} = l$ ،

در اینصورت

الف: اگر $\ell > ۰$ ، آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \text{ همگرا (واگرا) } \leftrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \text{ همگرا (واگرا)}$$

ب: اگر $\ell = ۰$ ، آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \text{ همگرا } \rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \text{ همگرا}$$

ج: اگر $\ell=+\infty$ ، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ واگرا} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ واگرا}$$

اثبات: الف- از اینکه $\ell>0$ ، طبق (۲-۲-۷) ۲ بخش دنباله ها داریم

$$\exists N_0>0 \ni \forall n \geq N_0 \rightarrow \frac{1}{2} l<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2} l$$
$$\rightarrow \frac{1}{2} l b_n<a_n<\frac{3}{2} l b_n$$

در اینجا طبق آزمون مقایسه I داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ همگرا (واگرا)} \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگرا (واگرا)}$$

ب: از اینکه $\ell=0$ اگر $\varepsilon=\frac{1}{2}$، داریم

$$\exists N_0>0 \ni \forall n \geq N_0 \rightarrow 0<\frac{a_n}{b_n}<\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 0<a_n<\frac{1}{2} b_n$$

و طبق آزمون مقایسه I، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگرا} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ همگرا}$$

ج: از اینکه $\ell=+\infty$، داریم

$$\exists N_0>0 \ni \forall n \geq N_0 \rightarrow \frac{a_n}{b_n}>M$$

$$\rightarrow a_n>M b_n$$

و طبق آزمون مقایسه I ، نتیجه می شود

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \text{ واگرا} \rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \text{ واگرا}$$

۲-۳-۲۰: مثال :

۱- همگرائی یا واگرائی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n + n}{۳^n - n}$ را بررسی کنید .

بدیهی است $\quad \forall n \geq ۱ , \quad ۰ < a_n = \frac{۲^n + n}{۳^n - n} \quad , \quad ۰ < b_n = (\frac{۲}{۳})^n$

و

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{۲^n + n/۳^n - n}{\left(۲/۳\right)^n}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\left(\frac{۲}{۳}\right)^n \frac{۱ + n/۲^n}{۱ - n/۳^n}}{\left(۲/۳\right)^n}$$

$$= \lim \frac{۱ + n/۲^n}{۱ - n/۳^n} = ۱$$

و اما سری هندسی $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۲}{۳}\right)^n$ همگراست زیرا $۰ < r = \frac{۲}{۳} < ۱$ بنابراین طبق آزمون مقایسه II (الف) ، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \frac{۲^n + n}{۳^n - n}$ همگراست .

۲- همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n\sqrt[n]{n}}$ را بررسی کنید .

بدیهی است $\forall n \geq ۱ \,,\; ۰ < a_n = \dfrac{۱}{n\sqrt[n]{n}} \quad , \quad ۰ < b_n = \dfrac{۱}{n}$

و
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{۱}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{۱}{n}} = \lim \frac{۱}{\sqrt[n]{n}} = ۱ \neq ۰$$

و طبق آزمون مقایسه II (الف) ، چون $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n = \dfrac{۱}{n}$ واگراست ، پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \dfrac{۱}{n\sqrt[n]{n}}$ نیز واگرا خواهد بود

.

۲-۳-۲۱: آزمون نسبت :

گیریم (a_n) یک دنباله حقیقی به طوریکه ،

الف : $\exists\, ۰ < \alpha < ۱ \,,\, \exists N_۰ > ۰ \;,\; \ni \forall n \geq N_۰ \;,\; |a_{n+۱}| \leq \alpha |a_n|$

در اینصورت $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است .

ب : $\exists N_۰ > ۰, \ni \forall n \geq N_۰ \;,\; |a_{n+۱}| \geq |a_n| > ۰$

آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست .

ج : گیریم $\forall n, a_n \neq ۰, \lim \left| \dfrac{a_{n+۱}}{a_n} \right| = l$

در اینصورت اگر $۰ \leq l < ۱$ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا و اگر $\ell > ۱$، سری واگرا است . اگر $\ell = ۱$ باشد، آزمون بی ارزش است.

اثبات: الف :

با توجه به فرض (الف) اگر $k = n - N_۰$ باشد ، داریم :

$$\forall n \geq N_\circ, |a_n| = |a_{k+N_\circ}| \leq \alpha |a_{k+N_\circ-1}| \leq \alpha^2 |a_{k+N_\circ-2}|$$

$$\leq \ldots \leq \alpha^k |a_{k+N_\circ-k}| = \alpha^k |a_{N_\circ}|$$

پس $\exists\, N_\circ > 0 \ni \forall n \geq N_\circ\ ,\ 0 \leq |a_n| \leq \alpha^k |a_{N_\circ}|$

و اما سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ همگراست زیرا $0 < \alpha < 1$ و طبق آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا بوده ، بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است .

ب: با توجه به فرض (ب) اگر $k = n - N_\circ$ داریم

$$|a_n| = |a_{k+N_\circ}| \geq |a_{k+N_\circ-1}| \geq |a_{k+N_\circ-2}| \geq \ldots \geq |a_{N_\circ}| > 0$$

پس $\exists N_\circ > 0\ , \ni \forall n \geq N_\circ\ , |a_n| \geq |a_{N_\circ}| > 0$

و این نتیجه میدهد $\lim a_n \neq 0$ بنابراین طبق قضیه (۲-۳-۸) شرط لازم همگرائی، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

ج: با توجه به فرض $0 \leq l < 1$ ، اگر $\alpha = \frac{l+1}{2}$، داریم $0 \leq l < \alpha < 1$ از اینکه $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$، داریم

$$\exists N_\circ > 0, \ni \forall n \geq N_\circ \to \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \alpha$$

$$\to |a_{n+1}| < \alpha |a_n|$$

پس $\exists\, 0 < \alpha < 1\ , \exists N_\circ > 0, \ni \forall n \geq N_\circ, |a_{n+1}| < \alpha |a_n|$

وطبق (الف) نتیجه می شود $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

اگر $\ell > 1$ یا $\ell = \infty$ داریم

$$\exists N_{0} > 0, \ni \forall n \geq N_{0} \to \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$$

$$\to |a_{n+1}| \geq |a_n|$$

و طبق (ب) نتیجه می شود $\sum a_n$ واگراست.

۲-۳-۲۲: مثال:

۱- همگرائی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ را بررسی کنید.

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

پس سری همگراست.

۲-همگرائی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ را بررسی کنید.

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)^3/2^{n+1}}{n^3/2^n} = \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

سری همگراست.

۳- همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}$ را بررسی کنید.

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(2n+1)!/(n+1)!}{(2n-1)!/n!} = \lim \frac{(2n)(2n+1)}{n+1} = \infty$$

پس سری واگراست.

۴- همگرائی یا واگرائی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ را بررسی کنید.

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)(2n+1)}{2.4.6....(2n)(2n+2)}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \Big/ \frac{1.3.5....(2n-3)(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \lim\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} < 1$$

سری همگراست.

۵-تعیین کنید به ازای چه مقادیری از x ، سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ همگراست.

طبق آزمون نسبت اگر $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| < 1$

سری همگراست، از طرفی

$$\forall x\in R,\ \lim\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = |x|\lim\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

بنابراین $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ همگراست.

در اینجا با استفاده از سری ها و آزمون نسبت در همگرائی سری ها، وجود تابع غیر جبری نمائی را ثابت می کنیم که کاربرد زیادی در مدل سازی های ریاضی دارد.

۲-۳-۲۳: معرفی تابع نمائی $f(x) = \exp(x)$.

با توجه به مثال قبل (مثال(۲-۳-۲۰)۵)، میدانیم

$$\forall x\in(-\infty,+\infty),\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

همگراست، بنابراین طبق تعریف همگرائی ، دنباله جمع جزئی سری، یعنی

$$\forall x\in(-\infty,+\infty),S_{n+1}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

همگرا می باشد، یعنی تابع حقیقی $S=S(x)$ وجود دارد به طوریکه

$$\forall x\in(-\infty,+\infty)\quad \lim S_{n+1}(x)=S(x)$$

در اینجا تابع $S=S(x)$ را به نام تابع نمائی گویند و با نماد زیر نمایش میدهند

$$\boxed{\forall x\in(-\infty,+\infty),S(x)=\exp(x)=\lim S_{n+1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$$

۲-۳-۲۴: خواص جبری تابع نمائی

$$y=S(x)=\exp(x)$$

۱) $\exp(0)=1$

زیرا $$\exp(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\to\exp(0)=1$$

۲- $\forall a,b\in \mathrm{R},\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$

با توجه به ضابطه تابع نمایی داریم،

$$\exp(a)\exp(b)=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n!}\right)$$

$$=\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\dots\right)\left(1+\frac{b}{1!}+\frac{b^2}{2!}+\dots\right)$$

$$=1+\frac{1}{1!}[a+b]+[\frac{1}{2!}a^2+\frac{1}{1!}\frac{1}{1!}ab+\frac{1}{2!}b^2]+[\frac{1}{3!}a^3+\frac{1}{2!\,1!}a^2b+\frac{1}{1!\,2!}ab^2+\frac{1}{3!}b^3]$$

$$\dots+\left[\frac{a^k}{k!}+\frac{1}{(k-1)!\,1!}a^{k-1}b+\frac{1}{(k-2)!}\cdot\frac{1}{2!}a^{k-2}b^2+\dots+\frac{1}{(k-r)!}\cdot\frac{1}{r!}a^{k-r}b^r+\dots+\frac{b^r}{k!}\right]+\dots$$

(با توجه به تساوی: $\frac{1}{(k-r)!r!}=\frac{k!}{k!(k-r)!r!}=\frac{1}{k!}\binom{k}{r}$)

داریم

$$=1+\frac{1}{1!}[a+b]+\frac{1}{2!}\left[\binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3\right]$$

$$+\frac{1}{k!}\left[\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\dots+\binom{k}{r}a^{k-r}b^r+\dots+\binom{k}{k}b^k\right]+\dots$$

$$=1+\frac{1}{1!}(a+b)+\frac{1}{2!}(a+b)^2+\frac{1}{3!}(a+b)^3+\dots+\frac{1}{k!}(a+b)^k+\dots$$

$$=\exp(a+b).$$

-۳ $$\forall x\in(-\infty,+\infty),\ \exp(-x)=(\exp(x))^{-1}=\frac{1}{\exp(x)}$$

با توجه به خواص جبری ۱و ۲ داریم

$$1=\exp(0)=\exp(x-x)=\exp(x+(-x))=\exp(x)\exp(-x)$$

$$\rightarrow \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$$

-۴ الف: $\forall x\ge 0,\ \exp(x)\ge 1$

ب: $\forall x \leq ۰,\ ۰ < \exp(x) \leq ۱$

اثبات: الف-

بدیهی است

$$\forall x \geq ۰, \forall n = ۱,۲,\ldots, S_{n+۱}(x) = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \geq ۱$$

بنابراین $\exp(x) = \lim S_{n+۱}(x) \geq ۱$ خواهد بود.

ب:

$$\forall x \leq ۰ \rightarrow -x \geq ۰ \xrightarrow{\text{الف}} \exp(-x) \geq ۱$$

$$\xrightarrow{(۳)} \frac{۱}{\exp(x)} \geq ۱$$

$$\rightarrow ۰ < \exp(x) \leq ۱$$

۵- $$\forall a, b \in \mathrm{R}, \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

$$\exp(a-b) = \exp(a)\exp(-b) = \exp(a)\frac{۱}{\exp(b)}$$

۶- $$\forall k = ۱,۲,\ldots, (\exp(x))^k = \exp(kx)$$

با توجه به خاصیت جبری ۲ و با استفاده از استقرا می توان نشان داد،

$$\forall k = ۱,۲,\ldots, \exp(kx) = \exp(x + x + \ldots + x)$$

$$= (\exp(x)\exp(x)\ldots\exp(x))$$

$$= (\exp(x))^k$$

۷- $$\forall k = ۱,۲,\ldots, (\exp(x))^{\frac{۱}{k}} = \exp(\frac{x}{k})$$

با توجه به ۶ داریم

$$\exp(x) = \exp(\frac{kx}{k}) = \left(\exp(\frac{x}{k})\right)^k$$

$$\rightarrow \left(\exp(x)\right)^{\frac{1}{k}} = \exp(\frac{x}{k})$$

۸- نتیجه از ۶ و ۷

الف: $$\forall m,n = 1,2,\dots, \left(\exp(x)\right)^{\frac{m}{n}} = \exp(\frac{mx}{n})$$

ب: با توجه به الف و (۳) داریم

$$\forall r \in Q, (\exp(x))^r = \exp(rx)$$

$$r > 0 \longrightarrow (\exp(x))^r = \exp(rx)$$

حال اگر $r > 0$ پس $-r < 0$، بنابراین طبق نتیجه اخیر داریم

$$\exp(-rx) = \left(\exp(x)\right)^{-r}$$

واما طبق(۳) $$\exp(-rx) = \frac{1}{\exp(rx)}$$

پس $$\forall r < 0, \frac{1}{\exp(rx)} = \left(\exp(x)\right)^{-r} = \frac{1}{\left(\exp(x)\right)^r}$$

و این نتیجه می دهد $$\exp(rx) = \left(\exp(x)\right)^r$$

۲-۳-۵: معرفی عدد نپر e و ضابطه تابع نمائی $y = \exp(x) = e^x$

اویلر(Leonhard Euler ۱۷۰۷-۱۷۸۳) ریاضی دان سوئیسی در ۱۷۴۸، در مقاله خود تحت عنوان (Introduction in Analysis Infitorum) نشان داد،

$$\exp(1) = \lim(S_{n+1}(1)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

عددی است گنگ و آنرا تا ۱۸ رقم اعشار محاسبه کرد،

$$\exp(1) = 2/718281828459045235$$

بعدها به احترام نپر ($1550-1617$ *John Napier*) ریاضی دان اسکاتلندی که اولین ریاضی دانی بود که به وجود عدد e پی برده بود، آنرا عدد نپرین نامیدند و با نماد e نشان دادند

$$.e = \exp(1) = 2/7182000$$

البته قبل از اویلر ، برنولی (Johann Bernoulli ۱۶۶۷–۱۷۴۸) ریاضی دان سوئیسی در ۱۶۸۳ نشان داده بود دنباله $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ همگراست و

$$2 \le \lim x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 3$$

در واقع ثابت می شود، $\lim x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = e$ که در ادامه به بررسی آن می پردازیم. در ضمن علیرغم اینکه اویلر غیرجبری بودن eرا در مباحث خود مطرح کرده بود ولی هرمیت ($1872-1901$ *charles Hermite*) ریاضی دان فرانسوی در ۱۸۷۳ رسما غیر جبری بودن e را در مقاله خود اثبات کرد.

طبق مثال(۲–۲–۱۸) دنباله ها داریم دنباله $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است و

$$\forall n \ge 1, 2 \le x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!} \le 3$$

پس همگرا است . از طرف دیگر با توجه به مثال (۱–۲–۳)۲ تعمیم نامساوی برنولی، هرگاه a_iها هم علامت بوده و $1 + a_i \ge 0$ ، آنگاه

$$\forall n \ge 1, (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \ge 1-(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

بنابراین با توجه به مثال(۲-۲-۱۸)۳، داریم

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{1}{n^r}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} 1\ (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})\ldots(1-\frac{r-1}{n})\frac{1}{r!}$$

$$\geq 1+\sum_{r=1}^{n}\left[1-(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{r-1}{n})\right]\frac{1}{r!}$$

$$=1+\sum_{r=1}^{n}\left[1-\frac{1+2+3+\ldots+(r-1)}{n}\right]\frac{1}{r!}$$

$$=1+\sum_{r=1}^{n}\left[1-\frac{r(r-1)}{2n}\right]\frac{1}{r!}$$

$$=1+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}-\frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r-1)}{r!}$$

$$=1+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}-\frac{1}{2n}\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{(r-2)!}$$

$$1+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}-\frac{1}{2n}\left[1+(\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!})-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right]$$

بنابراین

$$\forall n \geq 1\ ,\ 0 \leq S_{n+1}(1)-\frac{1}{2n}\left(S_{n+1}(1)-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right) \leq x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq S_{n+1}(1)$$

واین طبق قضیه فشردگی در دنباله ها نتیجه میدهد،

$$\lim x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim S_{n+1}(1) = \exp(1) = e$$

با توجه به نتیجه اخیر و خاصیت(۲-۳-۲۴)۹

$$\forall r \in Q, \exp(r) = \left(\exp(1)\right)^r = e^r$$

می توان ضابطه تابع
$$\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim S_{n+1}(x)$$

را بصورت زیر تعریف کرد.

۲-۳-۲۶: تعریف- تابع $\exp : (-\infty,+\infty) \to (0\,,+\infty)$ را باضابطه زیر تعریف می کنیم

$$\forall\, x \in (-\infty,+\infty)\ ,\ \exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

۲-۳-۲۷:خواص جبری تابع نمایی

با توجه به (۲-۳-۲۴) داریم

الف: $\forall a,b \in \mathrm{R}, e^{a+b} = e^a . e^b$

ب: $\forall a,b \in \mathrm{R}, \left(e^a\right)^b = e^{ab}$

۲-۳-۲۸ تعریف سری متناوب:

گیریم (a_n) یک دنباله غیر منفی $(a_n \geq 0)$ باشد ، در اینصورت سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

را یک سری متناوب گویند.

۲-۳-۲۹: مثال :

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$ ۴) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^n$

۲-۳-۳۰ : قضیه همگرایی سری متناوب (آزمون لایب نیتز Leibniz)

گیریم (a_n) یک دنباله غیر منفی نزولی و $\lim a_n = 0$ در اینصورت سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ همگراست.

اثبات: بدیهی است با توجه به نزولی بودن (a_n) داریم

$$\forall n \ge 1, S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \ge S_{2n}$$

و

$$S_{2n+3} = S_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \le S_{2n+1}$$

بنابراین زیر دنباله زوج جمع جزئی (S_{2n}) صعودی و زیر دنباله فرد جمع جزئی (S_{2n+1}) نزولی است. از طرف دیگر با توجه به نامساوی زیر

$$\forall n \ge 1, S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \ge S_{2n}$$

داریم

$$\forall n \ge 1, S_1 \ge S_3 \ge S_5 \ge \ldots \ge S_{2n+1} \ge S_{2n} \ge S_{2n-2} \ge \ldots \ge S_4 \ge S_2$$

واین نتیجه میدهد، (S_{2n}) صعودی و از بالا کراندار و (S_{2n+1}) نزولی و از پایین کراندار می باشند، بنابراین طبق قضیه (۲-۲-۱۶) همگرائی دنباله های یکنوا، هر دو زیر دنباله زوج و فرد، دنباله جمع جزئی سری یعنی (S_n) همگراست اگر $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1}$ باشد. گیریم $\lim S_{2n} = \alpha$ و $\lim S_{2n+1} = \beta$، در اینصورت با توجه به اینکه $\lim a_n = 0$ داریم

$$\beta - \alpha = \lim S_{2n+1} - \lim S_{2n} = \lim(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim a_{n+1} = 0$$

یعنی $\alpha = \beta$، پس (S_n) دنباله جمع جزئی سری همگرا است، یعنی سری متناوب همگرا خواهد بود.

۲-۳-۳۱: مثال :

۱- سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ همگراست ، زیرا $\forall n, a_n = \frac{1}{n} > 0$ ، $\lim \frac{1}{n} = 0$.

و در ضمن
$$\forall n \geq ۱,\quad a_{n+۱} = \frac{۱}{n+۱} \langle\ a_n = \frac{۱}{n}$$

نزولی است.

پس طبق قضیه (آزمون لایب نیتز) سری همگراست .

۲- همگرائی $p>۰$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n^p}$ را بررسی کنید .

و
$$\forall n, a_n = \frac{۱}{n^p} > ۰, \forall n \geq ۱, a_{n+۱} = \frac{۱}{(n+۱)^p} \leq a_n = \frac{۱}{n^p}$$

نزولی است و $\lim \frac{۱}{n^p} = ۰$. پس طبق قضیه قبل همگراست .

در واقع با توجه به مثال (۲-۳-۱۴)۴

$$\forall p \geq ۲, \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n^p}$$ همگرای مطلق است .

$$\forall ۰ < p \leq ۱, \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n^p}$$ همگرای مشروط است .

۳- همگرای سری متناوب $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!}$ را بررسی کنید .

با توجه به اینکه

$$\forall n, \left| a_n = \frac{(-۱)^n}{n!} \right| = \frac{۱}{n!}$$

و طبق مثال (۲-۳-۱۴)۱ و (۲-۳-۲۵) داریم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n!} = e$$

همگراست ، پس سری متناوب $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ همگرای مطلق است .

۴- تعیین کنید به ازای چه مقادیری از x ، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ همگراست .

با توجه به آزمون نسبت (۲-۳-۲۱)ج ، می دانیم به ازای x هایی که

$$\lim\left|\frac{(-1)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}}{(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}\right|=\left|1+\frac{1}{x}\right|<1$$

سری همگرای مطلق است . پس

$$\forall x,\left|1+\frac{1}{x}\right|<1\rightarrow -1<1+\frac{1}{x}<1$$

$$\rightarrow -2<\frac{1}{x}<0$$

$$\rightarrow -\infty<x<-\frac{1}{2}$$

سری همگرای مطلق است . حال اگر $\left|1+\frac{1}{x}\right|=1$ ، داریم $x=-\frac{1}{2}$ ، با جای گزینی در سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{-1/2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)$$

در اینجا $a_n=-1$ و $\lim a_n\neq 0$ و این نتیجه می دهد ، سری به ازای $x=-\frac{1}{2}$ ، واگراست و هم چنین به ازای x هائی که $\left|1+\frac{1}{x}\right|>1$ یعنی $x>0$ یا $-\frac{1}{2}<x<0$ نیز واگراست .