

فرض کنید واژه‌ها عیناً متهی با طول صفر وجود دارد. ترکیب واژه تهی با هر واژه دیگر تغییری در آن واژه نمی‌دهد. دو واژه را هم از یکدیگر جدا کرده حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱- هر واژه طولی بزرگتر از ۵ داشته باشد.

۲- دو واژه عیناً یکی باشند.

۳- یکی از واژه‌ها به صورت Ac^2d^2 یا Ad^2c^2 یا c^2d^2A یا d^2c^2A بوده و واژه دیگر نیز متناظراً "به صورت" $A(cd)^2$ یا $A(dac)^2$ یا $(cd)^2A$ یا $(dc)^2A$ باشد که در آن A واژه ایست دلخواه.

نشان دهید که اگر یک عضو دلخواه از کلاس هم‌ارزی $[x]$ با یک عضو دلخواه از کلاس هم‌ارزی $[y]$ ترکیب شود عنصر حاصل عضو از کلاس هم‌ارزی $[xy]$ خواهد بود و تعریف کنید $[x][y] = [xy]$ ثابت کنید که کلاس‌های هم‌ارزی تحت قانون ترکیب اخیر تشکیل یک نیم‌گروه می‌دهند که در آن اتحاد I_2 برقرار است ولی I_3 برقرار نیست.

البته مثال نقض یا ده شده نباید موجب کم‌بها گرفتن تاثیر I_2 شود. در حقیقت مسئله بعدی نشان می‌دهد که این فقط I_3 است که از اطاعت I_2 سرپیچی می‌کند و بقیه اتحادهای I_n از I_2 پیروی می‌نمایند.

(ط) در نیم‌گروه‌ها برقراری I_2 برقراری کلیه اتحادهای I_n را به ازای $3 \leq n$ نتیجه می‌دهد [۳] (راهنمایی: نخست I را اثبات کنید و بقیه را با استقراء بدست آورید.)

بالاخره در مسئله بعدی تاثیر برقراری I_n در نیم‌گروه‌ها مطالعه می‌شود. (ی) در نیم‌گروه‌ها از برقراری I_n برقراری $I_{n+mn(n-1)}$ نتیجه می‌شود که در آن n و m اعدادی درست و مثبت و دلخواه هستند [۲]. (راهنمایی: قلم، کاغذ حوصله و انگشتری اگر مایلید روی مسئله باز بعدی فکر کنید لازمست توانایی خود را با مسائل فوق بیازمائید.)

مسئله باز - از بند (ی) نتیجه می‌شود که در هر نیم‌گروه از برقراری I_3 برقراری اتحادهای $I_9, I_{15}, I_{21}, \dots, I_{3(2m+1)}, \dots$ بدست می‌آید چه اتحادهای I_n دیگری از I_3 نتیجه می‌شود؟

نکته - با اختیار یک گروه مناسب ۲۷ عضو می‌توان نشان داد که اتحادهای I_{3k+2} از اتحاد I_3 نتیجه نمی‌شود و یا با تغییراتی در مثال واژه‌ها می‌توان نشان داد که I_4 هم از I_3 نتیجه نمی‌گردد. بنا بر این شاید بتوان با مثال‌های گوناگون ثابت کرد که فقط اتحادهای I_3 از I_3