

کنید که در گروهها می توان n را صغریا منفی هم اختیار کرد.

- (الف) برقراری I_2 در یک گروه موجب آبدلی شدن آن و در نتیجه برقراری اتحادهای I_n به ازای همه اعداد درست n می باشد [مسئله ۳ صفحه ۴۸].
- (ب) اگر در یک گروه اتحاد I_n به ازای سه عدد درست متوالی برقرار باشد آن اتحاد به ازای هر عدد درست n برقرار است [مسئله ۴* صفحه ۴۹].
- (ج) با مثالی ساده می توان دید که در بند (ب) دو عدد درست متوالی کافی نیست [مسئله ۵ صفحه ۴۹].

(د) در یک گروه G فرض کنید اتحاد I_n به ازای یک عدد درست $1 < n$ برقرار است. آنگاه مجموعه های $G^{(n)} = \{x^n : x \in G\}$ و $G^{(n-1)} = \{x^{n-1} : x \in G\}$ زیر گروههای هنجار گروه G هستند و هر عضو $G^{(n)}$ با هر عضو $G^{(n-1)}$ جابجا می شود، یعنی

$$xy = yx \quad x \in G^{(n)}, y \in G^{(n-1)}$$

و انگهی اتحاد $(aba^{-1}b^{-1})^{n(n-1)} = e$ در G برقرار است [مسائل ۱۹ و ۱۸ صفحه ۷۱].

- (ه) اگر فرض بند (د) گروه G با پایان بوده و مرتبه آن نسبت به n اول باشد آنگاه اتحاد I_{n-1} نیز برقرار است، به ویژه اگر G نسبت به هر دو عدد $n-1, n$ اول باشد آنگاه G یک گروه آبدلی است.
- (و) اگر در گروه پایان G اتحاد I_3 برقرار و مرتبه G نسبت به ۳ اول باشد آنگاه TG آبدلی است [مسئله ۲۴* صفحه ۶۴].
- (ز) گروهی وجود دارد که در آن I_3 برقرار است ولی I_2 برقرار نیست [مسئله ۶ صفحه ۱۴۷].

اینک ارتباط میان اتحادهای I_n را در نیمگروهها بررسی می کنیم. اولین مطلب گویای عدم امکان تعمیم (الف) به نیمگروههاست.

- (ح) نیمگروهی وجود دارد که در آن I_2 برقرار است ولی I_3 برقرار نیست [مثال ۲ صفحه ۱۸]. از آنجا که عده زیادی از خوانندگان به مرجع اخیر دسترسی ندارند راهنمایی مختصری برای ساختن مثال پیشنهاد می شود. مجموعه کلیه واژه های ساخته شده از دو حرف c و d را در نظر بگیرید. واژه $z = xy$ که از یهلاوی هم نهادن دو واژه x و y بدست می آید ترکیب x با y بنا مید (مثال $x = ccd = c^2d$ و $y = dc$ و $z = xy = c^2d^2c$). تعداد حرفهای یک واژه را طول آن واژه

گویند و با $|z|$ نمایش می دهند (مثال: $|x| = 3$ و $|y| = 2$ و $|z| = 5$).