فصل ۸

خاصیت‌های مهّم معادل در مجموعه اعداد حقیقی و استقرای پیوسته

آنچه در مورد ساختار اعداد حقیقی بررسی شد، چند دستاورد مهم بهمراه داشت که اهم آن، چگال بودن $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ نتیجه (۷—۷—۸)، ارشمیدسی بودن $\mathbb{R}$ نتیجه (۷—۷—۹) و بالاخره کامل بودن $\mathbb{R}$ قضیه (۷—۷—۱۱) است. در این فصل خواص دیگری را در $\mathbb{R}$ بیان و بررسی می‌کنیم که در عین جالب و کاربردی بودن، با (۷—۷—۱۱) معادل هستند. علاوه بر این در این فصل به مفهومی نسبتاً جدید در مورد اعداد حقیقی اشاره می‌کنیم که در واقع تعمیم مفهوم استقراء از ω به مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است که به استقراء پیوسته[۱] معروف است. مفهوم استقرای پیوسته

---

[۱] Continuous Induction

الف) هنری بلمبورگ ۱۹۳۰ (سخنرانی در شیکاگو). نتایج باور نکردنی در ریاضیات. انتشارات دانشگاه شهید چمران (سخنرانی دکتر امید علی شهنی کرمزاده).

ب) The Induction on a Continiuous Variables, Zhang Jingzhong (IC/89/157).

ج) Induction over the Continuum, Iraj Kalantari, (2003).

می‌تواند منشاء رهیافت جدیدی در آنالیز مقدماتی و هم‌چنین در نظریه[۲] محاسبات، روی داده‌های پیوسته که در علوم کامپیوتر بی‌شک نقش مهمی خواهد داشت، باشد. برای درک این خواص به مفاهیمی نیاز داریم که ابتدا به بررسی آنها می‌پردازیم.

بخش ۱ : مجموعه‌های کراندار

۸ــ۱ــ۱: کران بالا، کران پایین و مجموعه کراندار، در میدان مرتب $(\mathbb{R}, +, ., \leq)$

i. گوییم، مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}$، از بالا کراندار است، هرگاه

$$\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq b$$

ii. گوییم، مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}$، از پایین کراندار است، هرگاه

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in X, a \leq x$$

iii. مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}$، را کراندار گویند، هرگاه در $\mathbb{R}$ دارای کران بالا و کران پایین باشد.

۸ــ۱ــ۲: مثال.

۱. مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^۲ < ۲\} \cup \mathbb{Q}^- \subseteq \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ از بالا کراندار است. زیرا تمام اعداد حقیقی بزرگتر از $\sqrt{۲} \in \mathbb{R}$ کران بالای این مجموعه می‌باشند. مجموعه $B = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^۲ > ۲\} \subseteq \mathbb{R}$ از پایین کراندار است، زیرا تمام اعداد حقیقی کوچکتر از $\sqrt{۲} \in \mathbb{R}$، کران پایین B هستند.

۲. مجموعه $A = \{(۱ + \frac{۱}{n})^n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \mathbb{R}$ کراندار است، زیرا بدیهی است

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, ۱ < (۱ + \frac{۱}{n})^n < ۳$$

۸ــ۱ــ۳: کوچک‌ترین کران بالا (سوپریمم[۳]).

فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}$. $\alpha \in \mathbb{R}$ را کوچک‌ترین کران بالای X در $\mathbb{R}$ گوییم و با نماد $\alpha = supX$ نمایش می‌دهیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

---

[۲] Theory of Computation over Continuous Data

[۳] Supremum

الف) α یک کران بالای X در $\mathbb{R}$ باشد.
ب) برای هر کران بالای X در $\mathbb{R}$، نظیر u، داشته باشیم $\alpha \leq u$.

به‌عبارت دیگر، برای عدد حقیقی نظیر $\epsilon > 0$، عدد حقیقی $\alpha - \epsilon$ دیگر یک کران بالای X نباشد، یعنی،

$$\exists x \in X, \alpha - \epsilon \leq x \text{ یا } \alpha \leq x + \epsilon$$

یا

$$"\alpha = supX, X \subseteq \mathbb{R} \leftrightarrow \forall t \in X, t \leq \alpha \wedge \forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+}, \exists x \in X, \alpha \leq x + \epsilon"$$

۸–۱–۴: بزرگ‌ترین کران پایین (اینفیمم[۴]).

گیریم $X \subseteq \mathbb{R}$، گوییم $\beta \in \mathbb{R}$، بزرگ‌ترین کران پایین X در $\mathbb{R}$ است و آن را با نماد $\beta = infX$ نمایش می‌دهیم، هرگاه

الف) β یک کران پایین X در $\mathbb{R}$ باشد.
ب) برای هر کران پایین X در $\mathbb{R}$، نظیر v، داشته باشیم $v \leq \beta$.

به‌عبارت دیگر، برای عدد حقیقی $\epsilon > 0$، عدد حقیقی $\beta + \epsilon$ دیگر یک کران پایین برای X نباشد، یعنی،

$$\exists x \in X, x \leq \beta + \epsilon$$

یا

$$"\beta = infX, X \subseteq \mathbb{R} \leftrightarrow \forall t \in X, \beta \leq t \wedge \forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+}, \exists x \in X, x \leq \beta + \epsilon"$$

۸–۱–۵: مثال.

۱. فاصله نیم باز $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ را در $\mathbb{R}$ درنظر بگیرید،

$$a = inf(a, b] \notin (a, b], \qquad b = sup(a, b] \in (a, b]$$

۲. در فاصله نیم باز $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$، داریم،

$$a = inf[a, b) \in [a, b), \qquad b = sup[a, b) \notin [a, b)$$

[۴] Infimum

۳. گیریم $S = \{\pi + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$، آن‌گاه

$$supS = \pi + 1 \in S, \qquad infS = \pi \notin S$$

۸ــ۱ــ۶: همسایگی یک نقطه.

گیریم $S \subseteq \mathbb{R}$ و $a \in S$، آن‌گاه مجموعه $N_r(a) = \{x \in \mathbb{R} :\mid x - a \mid < r\} \subseteq \mathbb{R}$ را یک همسایگی a با شعاع $r > 0$ یا به‌طور خلاصه rــهمسایگی a گویند. با توجه به تعریف قدرمطلق داریم $N_r(a) = (a - r, a + r)$. درضمن مجموعه $N_r^*(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 <\mid x - a \mid < r\}$ که می‌توان آن را به‌صورت $N_r^*(a) = (a - r, a) \cup (a, a + r)$ نیز نمایش داد، rــهمسایگی محذوف a گویند.

۸ــ۱ــ۷: نقطه انباشتگی[۵].

فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}$، گوییم $p \in \mathbb{R}$ یک نقطه انباشتگی X در $\mathbb{R}$ است، هرگاه برای هر rــهمسایگی محذوف p، نظیر $N_r^*(p)$، داشته باشیم $X \cap N_r^*(p) \neq \emptyset$.

۸ــ۱ــ۸: مثال.

۱. در فاصله باز $X = (a, b)$، نقاط a و b و هر نقطه در این فاصله، نقطه انباشتگی X است.

۲. در مجموعه $X = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \mathbb{R}$، نقطه $1 \in \mathbb{R}$، نقطه انباشتگی X در $\mathbb{R}$ است. زیرا برای هر rــهمسایگی ۱، نظیر $N_r(1) = (1 - r, 1) \cup (1, 1 + r)$، چون $r \in \mathbb{R}$ و $r > 0$ طبق خاصیت ارشمیدسی (در میدان اعداد حقیقی) (۷ــ۷ــ۹)،

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+, 0 < \frac{1}{n} < r$$

این نتیجه می‌دهد، $1 + r > 1 + \frac{1}{n} > 1$، یعنی $1 + \frac{1}{n} \in N_r^*(1)$، بنابراین $X \cap N_r^*(1) \neq \emptyset$.

۳. گیریم $A = (1, 2)$ و $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$ و $X = A \cup B \subseteq \mathbb{R}$. $p \in \mathbb{R}$ نقطه انباشتگی X است اگر و فقط اگر $p = 0$ یا $p \in [1, 2]$ باشد. (تمرین).

۸ــ۱ــ۹: مجموعه بسته.

$X \subseteq \mathbb{R}$ را یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ گوییم، هرگاه X شامل تمام نقاط انباشتگی‌اش

---

[۵] Accumulation Point

باشد، یعنی اگر $C(X)=\{a\in\mathbb{R}: X$ است a نقطه انباشتگی$\}$، آن‌گاه $C(X)\subseteq X$.

۸–۱–۱۰: مثال.

۱. گیریم $X=[a,b]$، دراین‌صورت $C(X)=[a,b]$، یعنی $X=C(X)$، بنابراین X یک مجموعه بسته است.

۲. مجموعه $X=\{x\in\mathbb{R}: x=\circ$ یا $x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{Z}^+\}\subseteq\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ بسته است. چرا؟

۳. گیریم $X=\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، دراین‌صورت X در $\mathbb{R}$ بسته است، زیرا $C(X)=\mathbb{R}$.

۴. هرگاه $X\subseteq\mathbb{R}$ دارای هیچ نقطه انباشتگی در $\mathbb{R}$ نباشد، یعنی $C(X)=\emptyset$، دراین‌صورت $C(X)=\emptyset\subseteq X$ و این نتیجه می‌دهد X در $\mathbb{R}$ بسته است.

۵. با توجه به مثال ۴، هرگاه $X=\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح در $\mathbb{R}$، آن‌گاه طبق نتیجه (۵–۴–۱۴) $(\forall a\in\mathbb{Z}, \nexists b\in\mathbb{Z}, \ni a<b<a+1)$، پس $C(X)=\emptyset$. بنابراین $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{R}$ بسته است.

۸–۱–۱۱: مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی [۶].

مجموعه $S\subseteq\mathbb{R}$ را متناهی گویند، هرگاه تهی بوده یا این‌که یک بازه آغازی اعداد طبیعی نظیر $I_n=\{\circ,1,2,\ldots,n\}$ وجود داشته به‌طوری‌که S با I_n هم‌توان شود $(S\sim I_n)$. در غیر این صورت S را نامتناهی گویند.

درواقع اگر $S\sim I_n$ باشد، آن‌گاه S نمایشی به‌صورت $S=\{x_\circ, x_1,\ldots,x_n\}$ خواهد داشت.

۸–۱–۱۲: مثال.

ω مجموعه اعداد طبیعی، $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح، $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی نامتناهی هستند (فصل ۱۰).

۸–۱–۱۳: پوشش [۷].

دسته‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ مانند T را یک پوشش برای مجموعه $X\subseteq\mathbb{R}$ گوییم، هرگاه $X\subseteq\cup T$ یا به‌عبارت دیگر،

$$\forall x\in X, \exists K_x\in T, x\in K_x$$

[۶] مجموعه‌های متناهی و نامتناهی را در فصل ۱۰، بطور کامل بررسی می‌کنیم.

[۷] Covering

۸−۱−۱۴: مثال.

مجموعه $T = \{[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ یک پوشش برای $X = [0, 2)$ است.

۸−۱−۱۵: پوشش باز[۸].

گیریم $X \subseteq \mathbb{R}$ و T دسته‌ای از زیرفاصله‌های باز $\mathbb{R}$ است، به‌طوری‌که T یک پوشش برای X در $\mathbb{R}$ باشد، دراین‌صورت T را یک پوشش X از فاصله‌های باز در $\mathbb{R}$ یا به‌طور خلاصه T را یک پوشش باز X در $\mathbb{R}$ گویند.

۸−۱−۱۶: مثال.

۱. $T = \{(-n, n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ یک پوشش باز برای $\mathbb{R}$ است.
۲. گیریم $X = [-1, 1]$ و $T = \{(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{Z}^+\}$، در این‌جا T یک پوشش باز برای X در $\mathbb{R}$ است.

بخش ۲ : خواص معادل در میدان مرتب اعداد حقیقی

در این بخش هفت خاصیت مهم مجموعه اعداد حقیقی را بررسی می‌کنیم که به نوعی اساس مفاهیم و قضایای آنالیز حقیقی و دیگر شاخه‌های ریاضی است که با $\mathbb{R}$ سروکار دارند، هستند.

۸−۲−۱: قضیه. خواص معادل در میدان مرتب اعداد حقیقی $(\mathbb{R}, +, ., \leq)$.

در میدان مرتب اعداد حقیقی $(\mathbb{R}, +, ., \leq)$، خواص زیر معادل هستند.

P_1. $\mathbb{R}$ یک میدان ارشمیدسی است و هر دنباله بنیادی در آن همگرا است. (اصل کمال).

P_2. هر زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ که از بالا کراندار باشد، دارای کوچک‌ترین کران بالا است.

P_3. $\mathbb{R}$ دارای هیچ شکاف نمی‌باشد (اصل دِدکیند).

P_4. هر زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ که از پایین کراندار باشد، دارای بزرگ‌ترین کران پایین است.

P_5. هرگاه $X \subseteq \mathbb{R}$ و X بسته و کراندار باشد، آن‌گاه برای هر دسته از زیرفاصله‌های

---
[۸] Open Covering

باز $\mathbb{R}$، مانند T که یک پوشش باز برای X باشد، یک زیرمجموعه متناهی T، مانند S وجود دارد به‌طوری‌که S نیز یک پوشش باز برای X در $\mathbb{R}$ است. به‌عبارت دیگر،

$$\forall T \subseteq P(\mathbb{R}), \mathbb{R} \text{ در } X \text{ پوشش باز } T, \exists S = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\} \subseteq T,$$
$$X \subseteq \cup S = O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_n$$

(قضیه هاینه‌بورل).

P_6. هر زیرمجموعه کراندار نامتناهی $\mathbb{R}$ دارای نقطه انباشتگی است.

P_7. $\mathbb{R}$ یک میدان ارشمیدسی است و برای هر $n \in \omega$ اگر X_n یک زیرفاصله بسته $\mathbb{R}$ بوده، به‌طوری‌که $X_{n+1} \subseteq X_n$، آن‌گاه $\cap_{n\in\omega} X_n \neq \emptyset$. (قضیه اشتراک کانتور).

اثبات: در این قضیه ثابت می‌کنیم

$$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_5 \to P_6 \to P_7 \to P_1$$

$P_1 \to P_2$:

فرض: P_1. $\mathbb{R}$ یک میدان ارشمیدسی کامل است.

حکم: P_2. هر زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ که از بالا کراندار باشد، دارای سوپریمم است.

گیریم $X \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$، $b \in \mathbb{R}$ یک کران بالای X در $\mathbb{R}$ و $\bar{x} \in X$، به‌طوری‌که $\bar{x} < b$. طبق خاصیت ارشمیدسی $\mathbb{R}$ (۷—۷—۹)، برای هر n در $\mathbb{Z}^+$، وجود دارد $k \in \mathbb{Z}^+$، به‌طوری‌که $\bar{x} + \frac{k}{n} \geq b$. زیرا بدیهی است $\forall n \in \mathbb{Z}^+, n\bar{x} < nb$ و طبق (۷—۷—۹) $\exists k \in \mathbb{Z}^+, k \geq nb - n\bar{x}$ و این نتیجه می‌دهد، $\exists k \in \mathbb{Z}^+, \bar{x} + \frac{k}{n} \geq b$. با توجه به این نتیجه، $\bar{x} + \frac{k}{n}$ یک کران بالای دیگر برای X محسوب می‌شود و می‌توان ادعا نمود، مجموعه $A_n = \{m \in \mathbb{Z}^+ : \text{است } X \text{ یک کران بالای } \bar{x} + \frac{m}{n}\} \subseteq \omega$ یک زیرمجموعه ناتهی اعداد طبیعی است، بنابراین طبق خاصیت خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی (۴—۵—۷)، دارای کوچک‌ترین عضو است، فرض کنید m_n کوچک‌ترین عضو A_n باشد. بدیهی است $y_n = \bar{x} + \frac{m_n}{n}$ یک کران بالای X است و علاوه‌براین $x_n = y_n - \frac{1}{n} = \bar{x} + \frac{m_n - 1}{n}$ یک کران بالای X نخواهد بود، زیرا m_n کوچک‌ترین عضو A_n است، بنابراین $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \exists x \in X, x_n = y_n - \frac{1}{n} \leq x$ و همچنین می‌توان نتیجه گرفت، $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+, \exists y \in X, x_m \leq y < y_n$. با توجه به نتایج به‌دست آمده، داریم،

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}^+,$$

$$x_m - x_n < y_n - x_n = y_n - (y_n - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$$
$$x_n - x_m < y_m - x_m = y_m - (y_m - \frac{1}{m}) = \frac{1}{m}$$

و این نتیجه می‌دهد،

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}^+, | x_m - x_n |= \max\{(x_m - x_n), -(x_m - x_n)\} \leq \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$$

از طرفی می‌دانیم در میدان ارشمیدسی $\mathbb{R}$، $L(\frac{1}{n}) = 0$، بنابراین دنباله (x_n) در $\mathbb{R}$ بنیادی است، بنابراین همگرا خواهد بود. فرض کنید در $\mathbb{R}$، a، $L(x_n) = a$. حال ثابت می‌کنیم $a = supX$. گیریم a کران بالای X نیست، پس $x \in X$ وجود دارد، به‌طوری‌که $x > a$ است. از این‌که $L(x_n) = a$ و $L(\frac{1}{n}) = 0$، پس اگر $\epsilon = \frac{1}{2}(x - a)$، وجود دارد $N_\epsilon \in \omega$، به‌طوری‌که

$$\forall n \in \omega, n \geq N_\epsilon \to x_n - a \leq | x_n - a |< \frac{1}{2}(x - a)$$

و این نتیجه می‌دهد، $\forall n \in \omega, n \geq N_\epsilon, x_n < \frac{1}{2}(x - a) + a$. از طرفی طبق خاصیت ارشمیدسی $\mathbb{R}$ (۷—۷—۹)، $\exists M_\epsilon \in \mathbb{Z}^+, \frac{1}{M_\epsilon} < \frac{1}{2}(x - a) = \epsilon$، حال اگر $N = \max\{N_\epsilon, M_\epsilon\}$ داریم،

$$\forall n \in \omega, n \geq N, x_n < \frac{1}{2}(x - a) + a, \frac{1}{n} < \frac{1}{2}(x - a)$$

و این نتیجه می‌دهد،

$$\begin{aligned} &\exists x \in X, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \omega, n \geq N, \\ &\to \quad y_n = x_n + \frac{1}{n} < a + \frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - a) = x \end{aligned}$$

این غیرممکن است، زیرا y_n یک کران بالای X است. بنابراین a بایستی یک کران بالای X، در $\mathbb{R}$ باشد. حال فرض کنید c یک کران بالای دیگر X در $\mathbb{R}$ است، ثابت می‌کنیم $a \leq c$، یعنی $a = supX$. گیریم $c < a$، یعنی در $\mathbb{R}$، $a - c > 0$. با توجه به این‌که در $\mathbb{R}$، a، $L(x_n) = a$، با انتخاب $\epsilon = a - c$، داریم،

$$\exists N'_\epsilon \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \omega, n \geq N'_\epsilon \to a - x_n \leq | x_n - a |< a - c$$

این نتیجه می‌دهد، $c < x_n$ و امّا می‌دانیم x_n یک کران بالا برای X نیست، یعنی $\exists x \in X, x_n < x$، بنابراین $\exists x \in X, c < x$ و این غیرممکن است، زیرا c یک کران بالای X است، پس بایستی $a \leq c$، یعنی $a = supX$ است.

$P_۲ \to P_۳$:

فرض: $P_۲$. هر زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ که از بالا کراندار است، دارای سوپریمم می‌باشد.
حکم: $P_۳$. $\mathbb{R}$ دارای هیچ شکافی نیست، یعنی هیچ بریدگی نظیر (X, Y) در $\mathbb{R}$ وجود ندارد، که تشکیل یک شکاف دهد.

فرض کنید (X, Y) یک بریدگی در $\mathbb{R}$ است که تشکیل یک شکاف می‌دهد. طبق تعریف، Y و X دو زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ بوده، به‌طوری‌که هر عضو Y یک کران بالای X است. بنابرین طبق فرض $P_۲$، $a = supX$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد. از این‌که $\mathbb{R} = X \cup Y$ و $a \in \mathbb{R}$، پس $a \in X$ یا $a \in Y$. اگر $a \in X$، آن‌گاه $\forall x \in X, x \leq a$ و این نتیجه می‌دهد a آخرین (بزرگ‌ترین) عضو X در X وجود دارد. اگر $a \in Y$، چون هر عضو Y یک کران بالای X بوده و $a = supX$، بنابراین، $\forall y \in Y, a \leq y$ یعنی $a \in Y$، اوّلین عضو (کوچک‌ترین عضو) Y است. این نتایج متناقض با فرض شکاف بودن (X, Y) است. بنابراین $\mathbb{R}$ نمی‌تواند دارای شکاف باشد.

$P_۳ \to P_۴$:

فرض: $P_۳$. $\mathbb{R}$ دارای هیچ شکافی نیست.
حکم: $P_۴$. هر زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ که از پایین کراندار است، دارای بزرگ‌ترین کران پایین (اینفیمم) است.

از این‌که $\mathbb{R}$ دارای هیچ شکافی نیست، پس هر بریدگی نظیر (X, Y) در $\mathbb{R}$ یا X دارای آخرین عضو یا Y دارای اوّلین عضو خواهد بود. حال فرض کنید B یک زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ است که از پایین دارای کران می‌باشد. بنابراین $X = \{x \in \mathbb{R} : \forall b \in B, x \leq b\}$ مجموعه تمام کرانهای پایین B در $\mathbb{R}$، ناتهی است. همچنین مجموعه $Y = \mathbb{R} - X$ نیز ناتهی است، زیرا برای $b \in B$، داریم $b + ۱ \in Y$. بدیهی است $\mathbb{R} = X \cup Y$ و $X \cap Y = \emptyset$ و علاوه بر این برای هر x در X و هر y در Y، بایستی $x < y$، زیرا درغیراین‌صورت اگر $\exists x \in X, y \in Y, y \leq x$ آن‌گاه $\forall b \in B, y \leq x \leq b$، یعنی $y \in X$ و این غیرممکن است. بنابراین (X, Y) یک بریدگی در $\mathbb{R}$ بوده و X رده پایین و Y رده بالایی بریدگی است. در این‌جا دو حالت وجود دارد.

الف) $X \cap B \neq \emptyset$.

ب) $X \cap B = \emptyset$.

گیریم $X \cap B \neq \emptyset$، یعنی وجود دارد $x_\circ \in B$ به‌طوری‌که $x_\circ \in X$، بنابراین طبق تعریف X، داریم $\forall x \in X, x \leq x_\circ$، یعنی $x_\circ$ آخرین عضو X ($x_\circ = \max X$) است و این نتیجه می‌دهد، برای هر $\epsilon > \circ$، $x_\circ + \epsilon \notin X$، یعنی $x_\circ + \epsilon$ یک کران پایین B نیست پس $x_\circ = \max X = infB$، یعنی B دارای بزرگ‌ترین کران پایین است. حال اگر $X \cap B = \emptyset$، آن‌گاه برای هر $b \in B$، $b \notin X$ بنابراین $b \in Y$، این نتیجه می‌دهد، $B \subseteq Y$. در این‌جا اگر Y دارای اوّلین (کوچک‌ترین) عضو نظیر $y_\circ \in Y$ باشد، با توجه به این‌که $B \subseteq Y$، بایستی $\forall b \in B, y_\circ \leq b$ و این نتیجه می‌دهد $y_\circ \in X$ و این متناقض با $X \cap Y = \emptyset$. پس Y دارای کوچک‌ترین عضو نیست، پس بایستی X دارای بزرگ‌ترین عضو (آخرین عضو) باشد که دراین‌صورت با توجه به قسمت (الف) ثابت کردیم $x_\circ = \max(X) = infB$ است.

$P_۴ \to P_۵$:

فرض: $P_۴$. هر زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ که از پایین کراندار است، دارای بزرگ‌ترین کران پایین می‌باشد.

حکم: $P_۵$. هر دسته از زیرفاصله‌های باز $\mathbb{R}$ که مجموعه بسته و کراندار $X \subseteq \mathbb{R}$ را بپوشاند، شامل یک زیرمجموعه متناهی نیز هست که X را می‌پوشاند، به‌عبارت دیگر هر پوشش باز مجموعه بسته و کراندار $X \subseteq \mathbb{R}$، شامل یک زیرپوشش متناهی برای X است.

فرض کنید X یک زیرمجموعه بسته و کراندار $\mathbb{R}$ است و T یک دسته از زیرفاصله‌های باز $\mathbb{R}$ بوده که X را می‌پوشاند. از این‌که X کراندار است، بنابراین u و v در $\mathbb{R}$ وجود دارند، به‌طوری‌که $X \subseteq [u, v]$ است. چون X در $\mathbb{R}$ بسته است، برای هر $y \in [u, v]$، به‌طوری‌که $y \notin X$، یک فاصله باز شامل y (همسایگی y) نظیر J_y وجود دارد، به‌طوری‌که $X \cap J_y = \emptyset$، زیرا درغیراین‌صورت اگر برای هر همسایگی y نظیر J_y، $X \cap (J_y - \{y\}) \neq \emptyset$، آن‌گاه y نقطه انباشتگی (۸—۱—۷) X بوده و بایستی $y \in X$ که خلاف فرض است. بنابراین اگر، $H = \{J_y : y \in [u, v] - X, X \cap J_y = \emptyset\}$ را درنظر بگیرید، طبق آنچه گفته شد، $H \neq \emptyset$ و علاوه براین $M = T \cup H$ شامل زیرفاصله‌های باز نظیر $J \in T$ و $J_y \in H$ است و یک پوشش باز برای $[u, v]$ خواهد بود. حال مجموعه

$$L = \{x : x \in [u, v] \text{ و } [x, v] \text{ توسط یک زیرپوشش متناهی } M \text{، پوشانده شود}\}$$

را درنظر بگیرید. $L \neq \emptyset$، زیرا، $v \in [u,v]$ و اگر $v \in X$، آن‌گاه وجود دارد $J \in T$، به‌طوری‌که $v \in J$، اگر $v \notin X$ آن‌گاه طبق تعریف H، وجود دارد $J_v \in H$، به‌طوری‌که $v \in J_v$، بنابراین، در هر حال $[v,v] = \{v\}$ توسط یک زیرپوشش متناهی M، پوشانده می‌شود. ضمناً بدیهی است، $\forall x \in L, u \leq x$ یعنی L از پایین کراندار است، بنابراین طبق فرض، L دارای بزرگ‌ترین کران پایین (اینفیمم) است. فرض کنید $x_\circ = infL$ باشد، چون $u \leq x_\circ$ پس $x_\circ \in [u,v]$، بنابراین وجود دارد $T_\circ \in M$، به‌طوری‌که $x_\circ \in T_\circ$ است. اگر $T_\circ = (a,b)$، آن‌گاه $a < x_\circ < b$ و چون $x_\circ = infL$ است، پس $z_\circ \in L$ وجود دارد، به‌طوری‌که $a < x_\circ < z_\circ < b$، زیرا، برای هر، $\epsilon > \circ$، به‌طوری‌که $a < x_\circ < x_\circ + \epsilon < b$، عنصر $x_\circ + \epsilon$ یک کران پایین برای L نخواهد بود، بنابراین، $\exists z_\circ \in L, a < x_\circ < z_\circ < x_\circ + \epsilon < b$. ازاین‌که $z_\circ \in L$، بنابراین $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\} \subseteq M$ وجود دارد که یک زیرپوشش باز متناهی M برای $[z_\circ, v]$. از طرفی $x_\circ \in T_\circ = (a,b)$، بنابراین $\{T_\circ, T_1, \ldots, T_m\} \subseteq M$ یک زیرپوشش باز متناهی برای $[x_\circ, v]$ خواهد بود. حال نشان می‌دهیم $x_\circ = u$ و حکم ثابت می‌شود. اگر $x_\circ \neq u$ پس $u < x_\circ$، از طرفی $a < x_\circ$، بنابراین $\max\{a,u\} < x_\circ$. طبق خاصیت چگال بودن $\mathbb{R}$، $\exists z_1 \in \mathbb{R}, a, u \leq \max\{a,u\} < z_1 < x_\circ < b \leq v$. بنابراین $z_1 \in [u,v]$ و طبق آنچه در بالا نتیجه گرفته شد، فاصله بسته $[z_1, v]$ توسط زیرپوشش متناهی $\{T_\circ, T_1, \ldots, T_m\} \subseteq M$، پوشانده می‌شود، بنابراین بایستی $z_1 \in L$. از طرفی $x_\circ = infL$، این نتیجه می‌دهد $x_\circ \leq z_1$ و این متناقض با نتیجه بالا است. بنابراین بایستی $x_\circ = u$، یعنی $[u,v]$ توسط زیرپوشش باز متناهی $\{T_\circ, T_1, \ldots, T_m\} \subseteq M$ پوشانده می‌شود، بنابراین $X \subseteq [u,v]$ نیز توسط این زیرپوشش باز متناهی، پوشانده خواهد شد. از طرف دیگر هیچ زیر فاصله باز در H با X اشتراک نداشته و $M = T \cup H$، بنابراین T بایستی دارای یک زیرپوشش باز متناهی بوده و X را بپوشاند.

$P_5 \to P_6$:

فرض: P_5. هر دسته از زیرفاصله‌های باز $\mathbb{R}$ که مجموعه بسته و کراندار $X \subseteq \mathbb{R}$ را بپوشاند، شامل یک زیرپوشش باز متناهی نیز است که X را می‌پوشاند.

حکم: P_6. هر زیرمجموعه نامتناهی و کراندار $\mathbb{R}$، دارای نقطه انباشتگی است.

زیرمجموعه نامتناهی و کراندار $X \subseteq \mathbb{R}$ را درنظر بگیرید، فرض کنید X هیچ نقطه انباشتگی نداشته باشد. بنابراین طبق مثال (۸−۱−۱۰) ۴ (هرگاه $X \subseteq \mathbb{R}$ و هیچ نقطه انباشتگی در $\mathbb{R}$ نداشته باشد، آن‌گاه X در $\mathbb{R}$ بسته است) X در $\mathbb{R}$ بسته است.

فرض کنید $x \in X$، چون x نقطه انباشتگی X نیست، پس فاصله باز J_x شامل x وجود دارد، به‌طوری‌که $J_x \cap X = \{x\}$. بدیهی است که مجموعه $T = \{J_x : x \in X\}$ یک پوشش باز X است. حال چون $X \subseteq \mathbb{R}$، مجموعه‌ای بسته و کراندار است، طبق فرض یک زیرپوشش متناهی T، نظیر $\bar{T} = \{J_{x_۱}, J_{x_۲}, \ldots, J_{x_n}\} \subseteq T$ وجود دارد، به‌طوری‌که $X \subseteq \cup\bar{T}$، یعنی، $\forall x \in X, \exists m \in N, J_{x_m} \in \bar{T}, X \cap J_{x_m} = \{x = x_m\}$. دراین‌صورت بایستی $X = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه متناهی باشد، که خلاف فرض است. بنابراین X، بایستی داری نقطه انباشتگی باشد.

$P_۶ \to P_۷$:

فرض: $P_۶$. هر زیرمجموعه نامتناهی و کراندار $\mathbb{R}$، دارای نقطه انباشتگی است.

حکم: $P_۷$. $\mathbb{R}$ یک میدان ارشمیدسی است و برای هر عدد طبیعی n، اگر J_n یک زیرفاصله بسته در $\mathbb{R}$ بوده، به‌طوری‌که $J_{n+۱} \subseteq J_n$، آن‌گاه $\cap_{n\in\omega} J_n \neq \emptyset$.

گیریم $\mathbb{R}$ میدان ارشمیدسی نیست، بنابراین طبق (۷—۷—۹)،

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, ۰ < a < b, \forall n \in \mathbb{Z}^+, a \leq na < b$$

این نتیجه می‌دهد، مجموعه $X = \{na : n \in \mathbb{Z}^+\}$ یک زیرمجموعه نامتناهی و کراندار $\mathbb{R}$ است که دارای هیچ نقطه انباشتگی نیست (تمرین) و این خلاف فرض است، پس $\mathbb{R}$ میدان ارشمیدسی است. حال فرض کنید $\{J_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ یک خانواده از زیرفاصله‌های بسته در $\mathbb{R}$ نظیر $J_n = [a_n, b_n]$ است، به‌طوری‌که $\forall n \in \mathbb{Z}^+, J_{n+۱} \subseteq J_n$، بنابراین،

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_۱ \leq a_n \leq a_{n+۱} \leq b_{n+۱} \leq b_n \leq b_۱$$

و این نتیجه می‌دهد، مجموعه $X = \{a_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ یک زیرمجموعه کراندار $\mathbb{R}$ است. حال اگر، $\exists r \in \mathbb{Z}^+, \forall m \in \mathbb{Z}^+, m \geq r \to a_m = a_r$، در این‌صورت $\forall m \in \mathbb{Z}^+, m \geq r, a_m \leq a_r \leq b_m$ و علاوه بر این بدیهی است

$$a_۱ \leq a_۲ \leq \ldots \leq a_{r-۱} \leq a_r$$

و این نتیجه می‌دهد،

$$\forall m \in \mathbb{Z}^+, a_r \in J_m = (a_m, b_m)$$

بنابراین $a_r \in \cap_{m\in\mathbb{Z}^+} J_m$، یعنی $\cap_{m\in\mathbb{Z}^+} J_m \neq \emptyset$ و حکم ثابت است. حال گیریم ادعای وجود r ای در $\mathbb{Z}^+$، به‌طوری‌که $\forall m \in \mathbb{Z}^+, m \geq r \to a_m = a_r$

نادرست باشد، بنابراین $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \exists m \in \mathbb{Z}^+, a_n < a_m$، دراین‌صورت مجموعه $X = \{a_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$ یک زیرمجموعه نامتناهی $\mathbb{R}$ است و چون کراندار می‌باشد، طبق فرض دارای نقطه انباشتگی است. فرض کنید $x_\circ \in \mathbb{R}$ نقطه انباشتگی X است. نشان می‌دهیم $x_\circ \in \cap_{n\in\mathbb{Z}^+} J_n$، یعنی $\forall n \in \mathbb{Z}^+, x_\circ \in (a_n, b_n)$. گیریم چنین نباشد، اگر $n \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد، به‌طوری‌که $x_\circ < a_n$، دراین‌صورت، $\forall m \in \mathbb{Z}^+, m \geq n \to x_\circ < a_n \leq a_m$. بنابراین اگر $\epsilon = a_n - x_\circ$ اختیار کنیم، آن‌گاه فاصله باز $(x_\circ - \epsilon, x_\circ + \epsilon)$ شامل تعداد متناهی عناصر X خواهد بود، زیرا برای هر r در $\mathbb{Z}^+$، به‌طوری‌که $a_r \in (x_\circ - \epsilon, x_\circ + \epsilon)$، داریم $x_\circ - \epsilon < a_r < x_\circ + \epsilon$ و این نتیجه می‌دهد، $a_r < x_\circ + a_n - x_\circ = a_n$. حال چون $\forall m \in \mathbb{Z}^+, m \geq n \to a_n \leq a_m$، پس تعداد متناهی $r \in \mathbb{Z}^+$ است، به‌طوری‌که $a_r < a_n$ و این متناقض با نقطه انباشتگی بودن، $x_\circ$ است، زیرا کافی است یک همسایگی $x_\circ$ با شعاع $l = \frac{1}{2}\min\{\mid x_\circ - t \mid : t \in (x_\circ - \epsilon, x_\circ + \epsilon) \cap X\}$، انتخاب کنیم و دراین‌صورت، $X \cap (N_l(x_\circ) - \{x_\circ\}) = \emptyset$. بنابراین $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n \leq x_\circ$. گیریم $n \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارد، به‌طوری‌که $b_n < x_\circ$، این نتیجه می‌دهد، $\forall m \in \mathbb{Z}^+, a_m \leq b_n < x_\circ$ حال با انتخاب $\epsilon = (x_\circ - b_n)$، بدیهی است $X \cap (x_\circ - \epsilon, x_\circ + \epsilon) = \emptyset$ و این متناقض با نقطه انباشتگی بودن $x_\circ$ است، پس بایستی $\forall n \in \mathbb{Z}^+, x_\circ \leq b_n$. بنابراین با توجه به نتایج به‌دست آمده، داریم $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n \leq x_\circ \leq b_n$، و داریم، $x_\circ \in \cap_{n\in\mathbb{Z}^+} J_n$.

$P_۲ \to P_۱$:

فرض: $P_۲$. $\mathbb{R}$ یک میدان ارشمیدسی است و برای هر خانواده‌ای از زیرفاصله‌های بسته در $\mathbb{R}$، نظیر $\{J_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$، به‌طوری‌که $\forall n, J_{n+۱} \subseteq J_n$، داریم، $\cap_{n\in\omega} J_n \neq \emptyset$.

حکم: $P_۱$. $\mathbb{R}$ یک میدان ارشمیدسی است و هر دنباله بنیادی در $\mathbb{R}$ همگرا است.

با توجه به حکم و فرض، کافی است، ثابت کنیم هر دنباله بنیادی در $\mathbb{R}$ همگرا است. گیریم (x_n) یک دنباله بنیادی در $\mathbb{R}$ باشد. دراین‌صورت برای هر $k \in \mathbb{Z}^+$، وجود دارد $n_k \in \mathbb{Z}^+$، به‌طوری‌که

$$\forall n \geq n_k, x_{n_k} - \frac{۱}{k} < x_n < x_{n_k} + \frac{۱}{k} \qquad (*)$$

و برای هر m در $\mathbb{Z}^+$،

الف) $P_m = \max\{n_k : k \leq m, \text{در } \mathbb{Z}^+\} \in \mathbb{Z}^+$

ب) $a_m = \max\{x_{n_k} - \frac{۱}{k} : k \leq m, \text{در } \mathbb{Z}^+\} \in \mathbb{R}$

ج) $b_m = \min\{x_{n_k} + \frac{۱}{k} : k \leq m, \text{در } \mathbb{Z}^+\} \in \mathbb{R}$

بدیهی است طبق (الف—ج) داریم

$$\forall m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq P_{m+1}, a_m \leq a_{m+1} < x_n < b_{m+1} \leq b_m$$

و این نتیجه می‌دهد، اگر $\forall m \in \mathbb{Z}^+, J_m = [a_m, b_m]$ انتخاب کنیم، داریم $\forall m \in \mathbb{Z}^+, J_{m+1} \subseteq J_m$ و طبق فرض بایستی $\cap_{m\in\mathbb{Z}^+} J_m \neq \emptyset$ باشد. گیریم $a \in \cap_{m\in\mathbb{Z}^+} J_m$، بنابراین، طبق (ب) و (ج)،

$$\forall m \in \mathbb{Z}^+, x_{n_m} - \frac{1}{m} \leq a_m \leq a \leq b_m \leq x_{n_m} + \frac{1}{m}$$

از طرف دیگر طبق (*)، داریم

$$\forall m \in \mathbb{Z}^+, \exists n_m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_m, x_{n_m} - \frac{1}{m} \leq x_n \leq x_{n_m} + \frac{1}{m}$$

از این دو رابطه اخیر، نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned}\forall m \in \mathbb{Z}^+, \exists n_m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_m, -\frac{2}{m} &= x_{n_m} - \frac{1}{m} - x_{n_m} - \frac{1}{m} \\ &\leq x_n - a \\ &\leq x_{n_m} + \frac{1}{m} - x_{n_m} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{2}{m}\end{aligned}$$

یعنی،

$$\forall m \in \mathbb{Z}^+, \exists n_m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq n_m, | x_n - a | \leq \frac{2}{m}$$

از طرفی طبق خاصیت ارشمیدسی $\mathbb{R}$، برای هر $\epsilon > 0$ در $\mathbb{R}$، وجود دارد $m = m(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+$، به‌طوری‌که $\frac{2}{m(\epsilon)} < \epsilon$، بنابراین با توجه به نتیجه اخیر، داریم

$$\forall \epsilon > 0, \exists m = m(\epsilon), \exists N_\epsilon = n_m(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+, \forall n \geq N_\epsilon, | x_n - a | \leq \frac{2}{m(\epsilon)} < \epsilon$$

یعنی (x_n) در $\mathbb{R}$ همگرا است. □

بخش ۳ : استقرای پیوسته (استقراء روی مجموعه اعداد حقیقی[۹])

در سال ۱۹۳۰ هنری بلومبرگ[۱۰] در یک سخنرانی در شهر شیکاگو به ایدهٔ استقراء روی $\mathbb{R}$ اشاره می‌کند که موضوع سخنرانی در بولتن انجمن ریاضی آمریکا به چاپ می‌رسد. به‌نظر می‌رسد پیگیری خاصی روی این موضوع انجام نگرفته، تا سال ۱۹۸۹ که ژانگ جینگ ژونگ[۱۱] ریاضیدان چینی در مقاله‌ای تحت عنوان "استقراء روی متغیرهای پیوسته[۱۲]" با همکاری مرکز فیزیک نظری تریست ایتالیا[۱۳]، مفهوم استقراء پیوسته را مطرح و معادل بودن آن را با $P_۳$ (۸—۲—۱) که به اصل دِدکیند مشهوراست، اثبات می‌کند. همانطور که قبلاً گفته شد با مفهوم استقرای پیوسته می‌توان رهیافت جدیدی در آنالیز مقدماتی ارائه داد. در این بخش به ارائهٔ مفهوم استقرای پیوسته می‌پردازیم و بعضی از معادل‌های آن را نیز ثابت می‌کنیم.

۸—۳—۱: تعریف. استقرای پیوسته CI.

گیریم $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی، $P(x)$ یک گزاره‌نما با مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ و

$$S = \{x \in \mathbb{R} :\ p(x)\}$$

بطوریکه

(الف) $\exists a \in \mathbb{R},\ \ni I_a = (-\infty, a) \subseteq S$

(ب) $\forall y \in \mathbb{R}, I_y : (-\infty, y) \subseteq S \longrightarrow \exists \varepsilon > ۰ \ni I_{y+\varepsilon} = (-\infty, y+\varepsilon) \subseteq S$

آنگاه $S = \mathbb{R}$. (استقرای پیوسته در واقع تعمیم استقرای قوی روی ω مجموعه اعداد طبیعی (۴—۵—۶) است.)

۸—۳—۲: قضیه. معادل بودن استقرای پیوسته CI با اصل دِدکیند DA $(CI \leftrightarrow DA.((۱—۲—۸)P_۳)$.

---

[۹] Induction on Real Numbers

[۱۰] Henry Bulmberg

[۱۱] Zhang Jingzhong (Institute of Mathematical Science, Chengdu Branch, Ac. Sinica 610015

[۱۲] Induction on Continuous Variables (IC/89/157)

[۱۳] International Atomic Energy Agency, Trieste, Italy

اثبات: $(CI \longrightarrow DA)$.
گیریم (۸—۳—۱) برای $\mathbb{R}$ درست و $\mathbb{R}$ یک شکاف نظیر (A, B) داشته‌باشد، یعنی

$$\exists A, B \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} = A \cup B, \forall a \in A, \forall b \in B, a < b.$$

و A دارای ماکسیمم (آخرین عضو) و B دارای عنصر مینیمم (اولین عضو) نباشد. مجموعهٔ $S = \{x \in \mathbb{R} : x \in A\} = A$ را درنظر بگیرید. طبق تعریف شکاف $A \neq \emptyset$، پس $\exists a \in \mathbb{R}, \ni a \in A$ و علاوه بر این داریم $\forall x \in \mathbb{R}, x < a \longrightarrow x \in A$ بنابراین

$$\text{(الف)}\ \exists a \in \mathbb{R}, \ni I_a = (-\infty, a) \subseteq A = S$$

حال گیریم $y \in \mathbb{R}(= A \cup B)$ و $I_y = (-\infty, y) \subseteq A$، بدیهی است $y \notin B$، زیرا اگر $y \in B$، آنگاه $\forall z \in B, y \leq z$، یعنی B دارای عنصر می‌نیمم است که خلاف فرض است. بنابراین بایستی $y \in A$، از اینکه A دارای عنصر ماکسیمم نیست پس

$$\exists t \in A, \ni y < t$$

گیریم $\varepsilon = t - y > 0$، طبق تعریف شکاف

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < t = y + \varepsilon \longrightarrow x \in A$$

بنابراین

$$\text{(ب)}\ \forall y \in \mathbb{R}, I_y \subseteq A = S \longrightarrow \exists \varepsilon > 0, \ni I_{y+\varepsilon} \subseteq A = S$$

طبق CI، بایستی $A = \mathbb{R}$ و این نتیجه می‌دهد $B = \emptyset$ که خلاف فرض است. پس $\mathbb{R}$ دارای هیچ شکافی نیست.
$(CI \leftarrow DA)$.
گیریم $\mathbb{R}$ دارای هیچ شکافی نیست و $S \subseteq \mathbb{R}$ به‌طوریکه S دارای شرایط (الف) و (ب) (۸—۳—۱) است، یعنی

$$\text{(الف)}\quad \exists a \in \mathbb{R}, \ni I_a \subseteq S.$$
$$\text{(ب)}\quad \forall y \in \mathbb{R}, I_y \subseteq S \longleftarrow \exists \varepsilon > 0, \ni I_{y+\varepsilon} \subseteq S.$$

ولی $S \neq \mathbb{R}$. حال مجموعهٔ

$$A = \{t \in \mathbb{R} : (-\infty, t) = I_t \subseteq S\}$$

بدیهی است $A \neq \emptyset$ زیرا $a \in A$ است. مجموعهٔ $B = \mathbb{R} - A$ ناتهی است زیرا اگر $B \neq \emptyset$، آنگاه

$$\forall x \in \mathbb{R}, I_x = (-\infty, x) \subseteq S$$

و این نتیجه می‌دهد $S = \mathbb{R}$ که خلاف فرض است پس $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$. بدیهی است $\mathbb{R} = A \cup B$ و $A \cap B = \emptyset$ و از اینکه $\forall x \in A, I_x \subseteq S$ بنابراین $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$، زیرا اگر $\exists y \in B, y \leq x$ آنگاه $I_y \subseteq I_x \subseteq S$ و این نتیجه می‌دهد $y \in A$ که غیر ممکن است. زیرا $A \cap B = \emptyset$.
بنابراین (A, B) یک بریدگی (۶—۵—۶) در $\mathbb{R}$ است. با توجه به اینکه فرض شده $\mathbb{R}$ بدون شکاف است، پس یا A دارای آخرین عضو یا B دارای اولین عضو است. گیریم A دارای آخرین عضو باشد، پس

$$\exists z \in \mathbb{R}, \ni z \in A, \forall t \in A, t \leq z$$

و این نتیجه می‌دهد $I_z \subseteq S$ و $\forall \varepsilon > \circ, I_{z+\varepsilon} \nsubseteq S$ و این خلاف فرض (ب) در مورد S است. گیریم B دارای اولین عضو باشد یعنی

$$\exists z \in B, \ni \forall t \in B, z \leq t$$

پس

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < z \longrightarrow x \in A$$

از اینکه $z \in B$، پس $I_z = (-\infty, z) \nsubseteq S$، پس

$$\exists t \in \mathbb{R}, \ni t < z, t \notin S$$

از اینکه $t < z$ پس $t \in A$، یعنی $I_t \subseteq S$. طبق خاصیت (ب)، S

$$\exists \varepsilon > \circ, \ni I_{t+\varepsilon} \subseteq S$$

و اما $t \in I_{t+\varepsilon}$ و این نتیجه می‌دهد $t \in S$ که متناقض با نتیجهٔ بالا است. پس B نیز نمی‌تواند دارای اولین عضو باشد. بنابراین (A, B) یک شکاف برای $\mathbb{R}$ خواهد بود که خلاف فرض است، پس اگر $S \subseteq \mathbb{R}$ و دارای شرایط (الف) و (ب) باشد، بایستی $S = \mathbb{R}$. $\square$

۸—۳—۳: نتیجه.

باتوجه به قضیهٔ (۸—۲—۱) و قضیهٔ (۸—۳—۲) اگر $CI = (۸ - ۳ - ۱) = P_۸$ داریم،

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} P_۱ & \to & P_۲ & \to & P_۳ & \to & P_۴ & \to & P_۵ & \to & P_۶ & \to & P_۷ & \to & P_۱ \\ & & & & \updownarrow & & & & & & & & & & \\ & & & & P_۸ & & & & & & & & & & \end{array}$$

.□

بخش ۴ : کاربرد استقراء پیوسته در آنالیز مقدماتی

در این بخش با استفاده از استقرای پیوسته به اثبات چند قضیهٔ مهم و جالب در آنالیز مقدماتی می‌پردازیم تا خوانندگان، رهیافت جدیدی برای اثبات بعضی قضایا در آنالیز مقدماتی را مشاهده کنند.

۸—۴—۱: تعریف. دنبالهٔ حقیقی صعودی (نزولی).

دنبالهٔ حقیقی $(x_n)_{n\in\omega}$ را صعودی (نزولی) گویند، هرگاه

$$\forall n \in \omega, x_n \leq x_{n+۱} (x_{n+۱} \leq x_n).$$

۸—۴—۲: دنبالهٔ کراندار.

دنبالهٔ حقیقی $(x_n)_{n\in\omega}$ را کراندار گویند، هرگاه

$$\exists M > ۰, \ni \forall n \in \omega, |x_n| \leq M.$$

۸—۴—۳: قضیه.

هرگاه دنبالهٔ حقیقی $(x_n)_{n\in\omega}$ یک دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار باشد، آنگاه $(x_n)_{n\in\omega}$ همگرا است، یعنی

$$\exists a \ni \mathbb{R}, \ni \lim x_n = a$$

اثبات: با فرض استقرای پیوستهٔ (۸—۳—۱) $P_{۸}$، قضیه را اثبات می‌کنیم. گیریم $(x_n)_{n\in\omega}$ همگرا نباشد. مجموعهٔ

$$S = \{x \in \mathbb{R} : J_x = (x, +\infty) \cap \{x_n\} \neq \emptyset\}$$

را درنظر بگیرید. بدیهی است

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ni x < x_{۱}, (x, +\infty) \cap \{x_n\} \neq \emptyset$$

زیرا

$$\forall n \in \omega, x < x_{۱} \leq x_{۲} \leq \dots$$

بنابراین

$$\text{(الف)}\ \exists x_{۱} \in \mathbb{R}, \ni I_{x_{۱}} = (-\infty, x_{۱}) \subseteq S.$$

حال گیریم $y \geq x_{۱}$ و $I_y \subseteq S$. اگر $\forall n \in \omega, (y, +\infty) \cap \{x_n\} = \emptyset$ آنگاه، $\forall n \in \omega, x_n \leq y$. از طرفی چون فرض شده $I_y \subseteq S$ پس

$$\forall \varepsilon > ۰, (y - \epsilon, +\infty) \cap \{x_n\} \neq \emptyset$$

یعنی

$$\exists N > ۰, \ni x_N > y - \varepsilon.$$

بنابراین

$$\begin{gathered}\forall \epsilon > ۰, \exists N > ۰, \ni \forall n, n \geq N \longrightarrow \\ y - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq y < y + \varepsilon\end{gathered}$$

و این نتیجه می‌دهد $\lim x_n = y$ وجود دارد که متناقض با فرض است. پس فرض $\forall n \in \omega, x_n \leq y$ نادرست است، بنابراین

$$\exists m \in \omega, \ni x_m > y.$$

گیریم $\varepsilon = x_m - y$، بنابراین

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < y + \varepsilon \longrightarrow J_x = (x, +\infty) \cap \{x_n\} \neq \emptyset.$$

زیرا $x_m \in J_x$. پس $I_{y+\varepsilon} \subseteq S$، بنابراین

$$(\text{ب})\ \forall y \in \mathbb{R}, I_y \subseteq S \longrightarrow \exists \varepsilon > ۰, \ni I_{y+\varepsilon} \subseteq S$$

و طبق $P_۸$، $S = \mathbb{R}$. یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x, +\infty) \cap \{x_n\} \neq \emptyset.$$

این نتیجه متناقض با فرض از بالا کراندار بودن $(x_n)_{n\in\omega}$ است، زیرا اگر $k \in \mathbb{R}$ و $\forall n \in \omega, x_n < k$، آنگاه $(k, +\infty) \cap \{x_n\} = \emptyset$. بنابراین $(x_n)_{n\in\omega}$ بایستی همگرا باشد. □

۸–۴–۴: قضیهٔ اکسترمم مطلق.

هرگاه f در $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\exists \alpha, \beta \in [a, b], \ni \forall x \in [a, b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

$m = f(\alpha)$ (می‌نیمم مطلق)، $f(\beta) = M$ (ماکزیمم مطلق).
اثبات: قضیه را برای ماکزیمم مطلق اثبات می‌کنیم.
گیریم f در $[a, b]$ ماکسیمم نداشته باشد، بنابراین

$$(*)\ \ \forall x \in [a, b], \exists x_۱ \in [a, b], \ni f(x) < f(x_۱)$$

فرض‌کنید

$$(**)\ \ \forall x < a, f(x) = f(a).$$
$$\forall x > b, f(x) = f(b).$$

حال مجموعهٔ

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \exists c \in [a, b], \ni \forall t < x, f(t) < f(c)\}$$

را درنظر بگیرید. با توجه به فرض (*) داریم:

$$a \in [a, b], \exists c \in [a, b], \ni f(a) < f(c)$$

و طبق (**)

$$\forall x < a, f(x) = f(a) < f(c)$$

بنابراین

$$\text{(الف)}\ \exists a \in \mathbb{R}, I_a \subseteq S.$$

حال گیریم $a \geq y$ و $I_y \subseteq S$. با توجه به فرض y نمی‌تواند ماکزیمم مطلق f باشد، پس $\exists d \in [a, b], \ni f(y) < f(d)$. ازطرفی f در y پیوسته است، یعنی $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$. اگر $\varepsilon = f(d) - f(y) > ۰$ بگیریم طبق تعریف حد داریم

$$\exists \delta_۱ > ۰, \ni \forall x \in (y - \delta_۱, y + \delta_۱), |f(x) - f(y)| < f(d) - f(y)$$

این نتیجه می‌دهد،

$$\forall x \in (y - \delta_۱, y + \delta_۱), f(x) < f(d).$$

از طرفی $I_y = (-\infty, y) \subseteq S$ و $(y - \delta_۱, y) \subseteq I_y$، پس

$$\forall x \in (y - \delta_۱, y) \subseteq I_y, \exists e \in [a, b], \ni f(x) < f(e).$$

گیریم $k = \max\{f(d), f(e)\}$، بنابراین

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in I_{y+\delta_۱} = (-\infty, y + \delta_۱) = (-\infty, y) \cup (y - \delta_۱, y + \delta_۱)$$

$$\exists c = d \vee e, \ni f(x) < f(c) = k.$$

این نتیجه می‌دهد،

$$\exists \varepsilon = \delta_۱ > ۰, \ni I_{y+\varepsilon} \subseteq S.$$

بنابراین

$$\text{(ب)}\ \forall y \in \mathbb{R}, I_y \subseteq S \longrightarrow \exists \varepsilon > ۰, \ni I_{y+\varepsilon} \subseteq S.$$

و طبق $P_۸$، $S = \mathbb{R}$، یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in [a, b], \ni f(x) < f(c).$$

و این غیرممکن است، کافی است $x > b$، انتخاب کنیم. پس f بایستی در $[a, b]$ دارای ماکزیمم مطلق باشد، یعنی

$$\exists \beta \in [a, b], \ni \forall x \in [a, b], f(x) \leq f(\beta).$$

مشابه همین اثبات را می‌توان برای می‌نیمم بکار برد. □

۸–۴–۵: تعریف پیوستگی یکنواخت[۱۴] در $[a, b]$.

گوییم تابع f در $[a, b]$ پیوستهٔ یکنواخت است، هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni \forall t_1, t_2 \in [a, b], |t_1 - t_2| < \delta \longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon.$$

۸–۴–۶: قضیه (پیوستگی‌یکنواخت).

هرگاه f در $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در $[a, b]$ پیوستهٔ یکنواخت است.
اثبات: گیریم

$$\forall x < a, f(x) = f(a), \forall x > b, f(x) = f(b).$$

مجموعهٔ

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ni \forall t_1, t_2 < x, \\ |t_1 - t_2| < \delta \longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon\}.$$

باتوجه به فرض، $\forall x < a, f(x) = f(a)$، داریم

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ni x < a, \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \ni t_1, t_2 < x \\ |t_1 - t_2| < \delta \longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon.$$

پس

(الف) $\exists a \in \mathbb{R}, \ni I_a \subseteq S.$

حال گیریم $y \in \mathbb{R}$ و $y \geq a$ و $I_y \subseteq S$. با توجه به پیوستگی f در y داریم

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \ni \forall t \in (y - \delta_1, y + \delta_1), |f(t) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

[۱۴] Uniform Continuity

این نتیجه می‌دهد،

$$\begin{aligned}&\forall t_۱, t_۲ \in (y-\delta_۱, y+\delta_۲),\\ &\qquad |f(t_۱)-f(t_۲)| = |(f(t_۱)-f(y))-(f(t_۲)-f(y))|\\ &\leq \quad |f(t_۱)-f(y)|+|f(t_۲)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon.\end{aligned}$$

ازطرفی $I_y \subseteq S$ پس

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > \circ, \exists \delta_۲ > \circ, \ni \forall t_۱, t_۲ \in I_y,\\ &\qquad |t_۱ - t_۲| < \delta_۲ \longrightarrow |f(t_۱)-f(t_۲)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

اگر $\delta = \min\{\delta_۱, \delta_۲\}$، داریم

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > \circ, \exists \delta = \min\{\delta_۱, \delta_۲\},\\ &\qquad \ni \forall t_۱, t_۲ \in I_{y+\delta} = I_y \cup (y-\delta, y+\delta)\\ &\qquad |t_۱ - t_۲| < \delta \longrightarrow |f(t_۱)-f(t_۲)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

بنابراین

(ب) $\forall y \in \mathbb{R}, I_y \subseteq S \longrightarrow \exists \delta > \circ, \ni I_{y+\delta} \subseteq S.$

طبق $P_۸$، $S = \mathbb{R}$، یعنی

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > \circ, \exists \delta > \circ, \ni \forall t_۱, t_۲ \in \mathbb{R},\\ &\qquad |t_۱ - t_۲| < \delta \longrightarrow |f(t_۱)-f(t_۲)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

پس f در $[a,b]$ پیوستهٔ یکنواخت است. □

۸–۴–٦: قضیهٔ بولتسانو[۱۵].

هرگاه f در $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b) < \circ$، آنگاه

[۱۵] Bolzano's Theorem

$$\exists c \in (a,b), \ni f(c) = \circ$$

اثبات: با فرض $f(a) < \circ$ و $f(b) > \circ$، قضیه را اثبات می‌کنیم. سایر حالت‌ها مشابه است. گیریم $\forall x > b, f(x) = f(b)$، $\forall x < a, f(x) = f(a)$ و $\forall x \in [a,b], f(x) \neq \circ$. حال مجموعهٔ

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \forall t < x, f(t) < \circ\}$$

را درنظر بگیرید. با توجه به اینکه $\forall x < a, f(x) = f(a) < \circ$، داریم

$$(\text{الف}) \exists a \in \mathbb{R}, \ni I_a \subseteq S$$

گیریم $y \geq a, y \in \mathbb{R}$ و $I_y \subseteq S$. پس

$$\forall x < y, f(x) < \circ$$

اگر $f(y) > \circ$، با توجه به پیوستگی f در y، داریم

$$\exists \delta_{\text{۱}} > \circ, \ni \forall t \in (y - \delta_{\text{۱}}, y + \delta_{\text{۱}}), f(t) > \circ.$$

و اما $(y - \delta_{\text{۱}}, y) \subseteq I_y$ و نتیجهٔ بالا متناقض با فرض $I_y \subseteq S$ است، پس بایستی $f(y) \leq \circ$. از طرفی با توجه به فرض $f(y) \neq \circ$، پس $f(y) < \circ$. مجدداً با توجه به پیوستگی f در y

$$\exists \delta >, \ni \forall x \in (y - \delta, y + \delta), f(x) < \circ$$

بنابراین

$$\exists \delta > \circ, \ni \forall x \in I_{y+\delta} = I_y \cup (y - \delta, y + \delta), f(x) < \circ$$

یعنی $I_{y+\delta} \subseteq S$، این نتیجه می‌دهد

$$(\text{ب}) \ \forall y \in \mathbb{R}, I_y \subseteq S \longrightarrow \exists \delta > \circ, \ni I_{y+\delta} \subseteq S.$$

طبق $P_{۸}$، $S = \mathbb{R}$ یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t < x, f(t) < \circ$$

و این متناقض بافرض $f(b) > \circ$ برای $x > b$. بنابراین

$$\exists c \in (a, b), \ni f(c) = \circ. \quad \square$$